

*Intégrales impropres, fonctions gamma et bêta et transformée de Laplace.*

Dans ce chapitre, nous revenons aux intégrales simples, mais cette fois soit l'intervalle d'intégration, soit la fonction à intégrer, soit les deux ne sont pas bornés. Toutes ces situations seront illustrées. Deux fonctions importantes, la fonction gamma et la fonction bêta, seront définies au moyen d'intégrales impropres. Nous étudierons ces fonctions et quelques-unes de leurs propriétés. La fonction gamma apparaît dans différents contextes en mathématiques, par exemple en théorie des nombres, en probabilité, etc. Nous conclurons ce chapitre en discutant d'une autre intégrale impropre: la transformée de Laplace. A une "bonne" fonction, cette transformée en associe une autre définie au moyen d'une intégrale impropre.

Il y a essentiellement deux types d'intégrales impropres. Dans le premier cas, le domaine d'intégration n'est pas borné. Voyons donc pour débiter ce premier type.

Supposons que  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto f(x)$  est une fonction telle que l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  existe pour tout nombre réel  $b, b \geq a$ . Si la limite  $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$  existe, on dit alors que la fonction  $f$  est intégrable sur l'intervalle  $[a, \infty)$  et on pose

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Supposons que  $f : (-\infty, b] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto f(x)$  est une fonction telle que l'intégrale  $\int_a^b f(x) dx$  existe pour tout nombre réel  $a, a \leq b$ . Si la limite  $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$  existe, on dit alors que la fonction  $f$  est intégrable sur l'intervalle  $(-\infty, b]$  et on pose

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Finalement supposons que la fonction  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est intégrable sur les intervalles  $[0, \infty)$  et  $(-\infty, 0]$ , alors on dit que  $f$  est intégrable sur  $\mathbf{R}$  et on pose

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^\infty f(x) dx.$$

Dans ce dernier cas, il faut noter que

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c f(x) dx.$$

Cependant que la réciproque est fautive, c'est-à-dire que la limite  $\lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c f(x) dx$  peut exister, alors que la fonction  $f(x)$  n'est pas intégrable sur  $\mathbf{R}$ . Pour illustrer cette dernière remarque, il suffit de considérer  $f(x) = x$ , alors

$$\int_{-c}^c x dx = 0 \quad \text{pour tout } c \geq 0 \quad \text{et} \quad \lim_{c \rightarrow \infty} \int_{-c}^c x dx = 0.$$

Mais il est clair que les intégrales  $\int_0^\infty x dx$  et  $\int_{-\infty}^0 x dx$  n'existent pas.

Considérons quelques exemples de ce premier type d'intégrales impropres.

Exemple 12.1:

Déterminons les nombres réels  $c$  pour lesquels l'intégrale  $\int_1^\infty x^c dx$  existe et calculons cette dernière.

$$\int_1^b x^c dx = \begin{cases} \left( \frac{x^{c+1}}{(c+1)} \right) \Big|_{x=1}^{x=b} = \frac{b^{c+1}}{(c+1)} - \frac{1}{(c+1)} & \text{si } c \neq -1; \\ \left( \ln(x) \right) \Big|_{x=1}^{x=b} = \ln(b) & \text{si } c = 1. \end{cases}$$

Si  $c > -1$ , alors

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^c dx = \infty,$$

car  $\lim_{b \rightarrow \infty} b^{c+1} = \infty$  étant donné que  $c + 1$  est un nombre positif. Si  $c = -1$ , alors

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{-1} dx = \infty,$$

car  $\lim_{b \rightarrow \infty} \ln(b) = \infty$ . Si  $c < -1$ , alors

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^c dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \frac{b^{c+1}}{c+1} - \frac{1}{c+1} \right) = \frac{-1}{c+1} \quad \text{car } \lim_{b \rightarrow \infty} b^{c+1} = 0.$$

En résumé, nous avons

$$\int_1^\infty x^c dx = \begin{cases} -1/(c+1) & \text{si } c < -1; \\ \text{n'existe pas} & \text{si } c \geq -1. \end{cases}$$

Par exemple,

$$\int_1^\infty x^{-2} dx = \frac{-1}{(-2+1)} = 1.$$

Exemple 12.2:

$$\int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( -e^{-x} \right)_{x=0}^{x=b} = \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-b}) = 1.$$

Exemple 12.3:

Montrons que

$$\int_0^\infty \exp(-x^2) dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Posons  $I = \int_0^\infty \exp(-x^2) dx$ . Alors

$$I^2 = \left( \int_0^\infty \exp(-x^2) dx \right) \left( \int_0^\infty \exp(-y^2) dy \right) = \iint_{\text{premier quadrant}} \exp(-(x^2 + y^2)) dx dy.$$

Nous pouvons maintenant utiliser les coordonnées polaires et nous obtenons après ce changement de coordonnées,

$$I^2 = \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \exp(-r^2) r d\theta dr = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty \exp(-r^2) r dr = \frac{\pi}{2} \left( \frac{-\exp(-r^2)}{2} \right)_{r=0}^{r=\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

Donc  $I = \sqrt{\pi}/2$ , car  $I > 0$  et ceci est vrai tout simplement parce que  $\exp(-x^2) > 0$  pour tout  $x$ .

Exemple 12.4:

$$\int_0^\infty \frac{1}{(1+x^2)} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{(1+x^2)} = \lim_{b \rightarrow \infty} \left( \arctan(x) \right)_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (\arctan(b) - \arctan(0)) = \pi/2.$$

Exemple 12.5:

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x} dx \quad \text{n'existe pas,}$$

car on a que

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^{-x} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left( -e^{-x} \right)_{x=a}^{x=0} = \lim_{a \rightarrow -\infty} (-1 + e^{-a}) = \infty.$$

Noter que l'intégrale  $\int_0^\infty e^{-x} dx$  existe, mais pour que  $\int_{-\infty}^\infty e^{-x} dx$  existe il faut que les deux intégrales  $\int_{-\infty}^0 e^{-x} dx$  et  $\int_0^\infty e^{-x} dx$  existent. Ce qui n'est pas le cas pour une de ces intégrales.

Il y a un deuxième type d'intégrales impropres. Dans ce cas, la fonction n'est pas bornée sur la région d'intégration. Considérons plus en détails cette situation.

Supposons que  $f : (a, b] \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto f(x)$  est une fonction telle que  $\int_c^b f(x) dx$  existe pour tout  $c, a < c \leq b$ . Si la limite à droite  $\lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx$  existe, on dit alors que  $f$  est intégrable sur l'intervalle  $[a, b]$  et on pose

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a^+} \int_c^b f(x) dx.$$

Dans ce cas, nous pourrions avoir  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$  et malgré cela être en mesure de définir  $\int_a^b f(x) dx$ .

Supposons que  $f : [a, b) \rightarrow \mathbf{R}, x \mapsto f(x)$  est une fonction telle que  $\int_a^c f(x) dx$  existe pour tout  $c, a \leq c < b$ . Si la limite à gauche  $\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$  existe, on dit alors que  $f$  est intégrable sur  $[a, b]$  et on pose

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx.$$

Dans ce cas, nous pourrions avoir  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$  et malgré cela être en mesure de définir  $\int_a^b f(x) dx$ .

Supposons que  $f$  est une fonction définie sur l'intervalle  $[a, b]$ , sauf au point  $c$ , alors on dit que  $f$  est intégrable sur l'intervalle  $[a, b]$  si et seulement si  $f$  est intégrable sur les intervalles  $[a, c]$  et  $[c, b]$  et dans ce cas, on pose

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Considérons quelques exemples de ce deuxième type d'intégrales impropres.

Exemple 12.6:

Déterminons les nombres réels  $d$  pour lesquels l'intégrale  $\int_0^1 x^d dx$  existe et calculons cette dernière. Notons premièrement que si  $d \geq 0$ , alors la fonction  $f(x) = x^d$  est définie pour tout  $x \in [0, 1]$ , c'est-à-dire que le cas où l'on a vraiment une intégrale impropre est celui où  $d < 0$ . Dans ce dernier cas, nous avons  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^d = \infty$  et  $f(x) = x^d$  est définie sur  $(0, 1]$ . Si  $d \neq -1$ , alors

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^d dx &= \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 x^d dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[ \frac{x^{d+1}}{d+1} \right]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{d+1} - \frac{c^{d+1}}{d+1} \right) \\ &= \begin{cases} 1/(d+1), & \text{si } d > -1; \\ \text{n'existe pas} & \text{si } d < -1. \end{cases} \end{aligned}$$

Si  $d = -1$ , alors

$$\int_0^1 x^{-1} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 x^{-1} dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[ \ln(x) \right]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} -\ln(c) = \infty.$$

En résumé, nous avons

$$\int_0^1 x^d dx = \begin{cases} 1/(d+1), & \text{si } d > -1; \\ \text{n'existe pas} & \text{si } d \leq -1. \end{cases}$$

Exemple 12.7:

Considérons l'intégrale  $\int_0^1 \ln(x) dx$ . La fonction  $\ln(x)$  n'est pas définie à  $x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ . Nous avons

$$\int_0^1 \ln(x) dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \ln(x) dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \left[ x \ln(x) - x \right]_c^1 = \lim_{c \rightarrow 0^+} (c - 1 - c \ln(c)) = -1.$$

Notons que ci-dessus nous utilisons le fait que

$$\lim_{c \rightarrow 0^+} c \ln(c) = \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{\ln(c)}{(1/c)} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{(1/c)}{(-1/c^2)} = \lim_{c \rightarrow 0^+} -c = 0$$

par la règle de l'Hopital.

Exemple 12.8:

Considérons l'intégrale  $\int_{-1}^1 1/(1-x^2) dx$ . La fonction  $f(x) = 1/(1-x^2)$  n'est pas définie aux deux points:  $x = 1$  et  $x = -1$  de l'intervalle d'intégration. Notons que

$$\frac{1}{(1-x^2)} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)}$$

et que

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(1-x^2)} dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{(1-x^2)} dx + \int_0^1 \frac{1}{(1-x^2)} dx.$$

Il nous faut donc considérer ces deux intégrales impropres et pour chacune, il y a un seul point où la fonction à intégrer n'est pas définie. Nous avons

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{(1-x^2)} dx = \int_{-1}^0 \left( \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} \right) dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{2(1-x)} dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{2(1+x)} dx.$$

La première de ces deux dernières intégrales est une intégrale propre et la seconde est impropre. Nous avons

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{2(1-x)} dx = \left( \frac{-\ln(1-x)}{2} \right)_{-1}^0 = \frac{\ln(2)}{2} \quad \text{et}$$

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{2(1+x)} dx = \lim_{a \rightarrow -1^+} \int_a^0 \frac{1}{2(1+x)} dx = \lim_{a \rightarrow -1^+} \left( \frac{\ln(1+x)}{2} \right)_a^0 = \infty.$$

Donc l'intégrale impropre  $\int_{-1}^0 1/(1-x^2) dx$  n'existe pas et conséquemment  $\int_{-1}^1 1/(1-x^2) dx$  n'existe pas non plus. Il est aussi possible de vérifier que  $\int_0^1 1/(1-x^2) dx$  n'existe pas.

Nous pourrions multiplier les exemples. Mais nous allons plutôt nous concentrer sur quelques fonctions classiques définies au moyen d'intégrales impropres. Pour vérifier que ces fonctions sont bien définies, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 12.1:

- a) Soient  $f(x)$  et  $g(x)$ , deux fonctions définies sur l'intervalle  $[a, \infty)$  telles que  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \geq a$ . Si  $\int_a^\infty g(x) dx$  existe, alors  $\int_a^\infty f(x) dx$  existe aussi.
- b) Soient  $f(x)$  et  $g(x)$ , deux fonctions définies sur l'intervalle  $(a, b]$  telles que  $0 \leq f(x) \leq g(x)$  pour tout  $a < x \leq b$ . Si  $\int_a^b g(x) dx$  existe, alors  $\int_a^b f(x) dx$  existe aussi.

Nous ne démontrerons pas ce résultat. Pour ce faire, il faut faire appel aux définitions des différentes intégrales impropres. Mais nous allons seulement illustrer pourquoi ce lemme doit être valable. Pour a),  $\int_a^\infty g(x) dx$  représente l'aire sous la courbe du graphe de  $g(x)$  et comme le graphe de  $f(x)$  est compris entre l'axe des  $x$  et le graphe de  $g(x)$ , nous avons que l'aire sous le graphe de  $f(x)$  sera aussi finie et que  $\int_a^\infty f(x) dx$  existe. L'argument est similaire pour b). Nous avons représenté ceci dans les figures 12.1 a) et b).

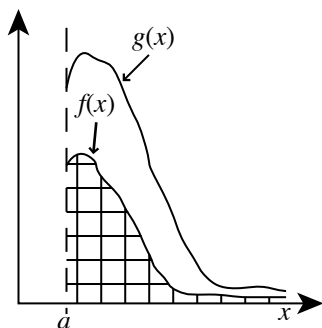


figure 12.1 (a)

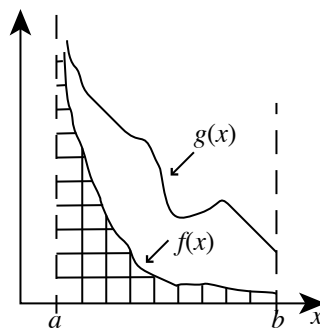


figure 12.1 (b)

Proposition 12.1:

L'intégrale impropre  $\int_0^\infty e^{-x}x^{y-1} dx$  existe pour tout  $y > 0$ .

Preuve: Si  $y \geq 1$ , alors l'intégrale est une intégrale impropre du premier type, car la fonction  $f(x) = e^{-x}x^{y-1}$  est bien définie sur l'intervalle  $[0, \infty)$ . Notons que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x/2}x^{y-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{y-1}}{e^{x/2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(y-1)x^{y-2}}{(1/2)e^{x/2}} = \dots = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(y-1)(y-2)\dots(y-k+1)x^{y-k}}{(1/2)^{k-1}e^{x/2}} = 0$$

en utilisant la règle de l'Hopital, si nécessaire, jusqu'à ce que  $y-k \leq 0$ . Il existe donc une constante  $M$  telle que  $0 \leq e^{-x/2}x^{y-1} \leq M$  pour tout  $x \in [0, \infty)$ . Après multiplication par  $e^{-x/2}$ , nous obtenons l'inégalité  $0 \leq e^{-x}x^{y-1} \leq Me^{-x/2}$  pour tout  $x \in [0, \infty)$ . Nous pouvons noter que

$$\int_0^\infty Me^{-x/2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b Me^{-x/2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ (-2)Me^{-x/2} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (2M - 2Me^{-b/2}) = 2M.$$

De ce qui précède et du lemme 12.1 a), nous avons que  $\int_0^\infty e^{-x}x^{y-1} dx$  existe si  $y \geq 1$ . Si  $0 < y < 1$ , alors l'intégrale est une intégrale impropre du premier et deuxième type, car la fonction  $f(x) = e^{-x}x^{y-1}$  n'est pas définie à  $x = 0$ . En effet,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{y-1}e^{-x} = \infty$ . Donc  $\int_0^\infty e^{-x}x^{y-1} dx$  existe si et seulement si  $\int_1^\infty e^{-x}x^{y-1} dx$  et  $\int_0^1 e^{-x}x^{y-1} dx$  existent. La première de ces deux dernières intégrales est du premier type, alors que le second est du deuxième type. Pour ce qui est de l'intégrale  $\int_1^\infty e^{-x}x^{y-1} dx$ , il suffit de procéder comme dans le cas  $y \geq 1$ . En effet, il existe une constante  $M$  telle que  $0 \leq e^{-x/2}x^{y-1} \leq M$  pour tout  $x \geq 1$ . Donc  $0 \leq e^{-x}x^{y-1} \leq Me^{-x/2}$  pour tout  $x \geq 1$  et  $\int_1^\infty e^{-x}x^{y-1} dx$  existe, parce que  $\int_1^\infty e^{-x/2} dx$  existe et à cause du lemme 12.1 a). Pour ce qui est de l'intégrale  $\int_0^1 e^{-x}x^{y-1} dx$ , il faut noter que

$$0 \leq e^{-x}x^{y-1} = \frac{x^{y-1}}{e^x} \leq x^{y-1} \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Parce que  $y-1 > -1$  et à cause de l'exemple 12.6, nous avons que  $\int_0^1 x^{y-1} dx$  existe. En utilisant le lemme 12.1 b) et ce qui précède, nous avons que l'intégrale  $\int_0^1 e^{-x}x^{y-1} dx$  existe si  $0 < y < 1$  et conséquemment  $\int_0^\infty e^{-x}x^{y-1} dx$  existe pour tout  $y > 0$ .

Cette intégrale présentée dans la proposition 12.1 est la fonction gamma. Plus exactement la fonction gamma est

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-x}x^{y-1} dx$$

pour  $y > 0$ . Comme nous venons de le vérifier cette intégrale impropre existe. Nous verrons plus tard comment prolonger la fonction gamma  $\Gamma(y)$  pour des nombres réels négatifs.

Dans les figures 12.2 et 12.3, nous avons tracé les graphes de  $\Gamma(y)$  et de  $1/\Gamma(y)$  pour  $y, -4 < y < 4$ .

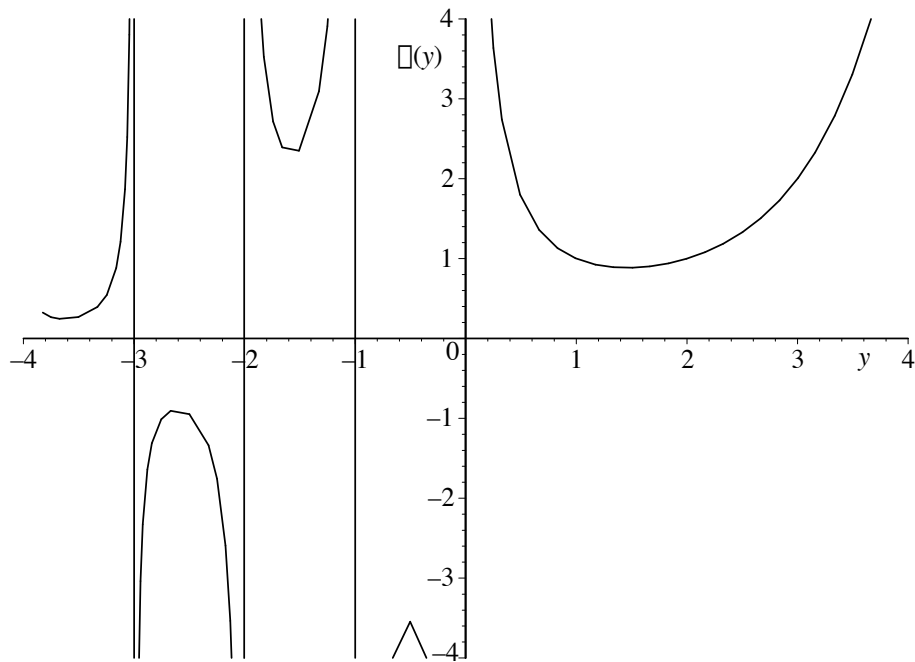


figure 12.2

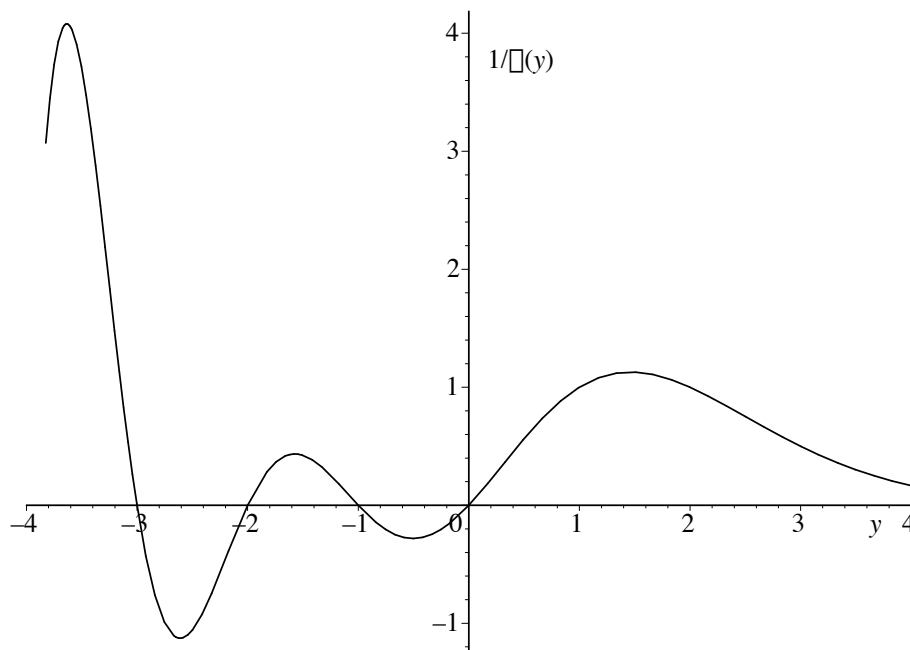


figure 12.3

Proposition 12.2 (Equation fonctionnelle de  $\Gamma$ ):

Si  $y > 0$ , alors  $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$

Preuve: Si  $0 < a < b$ , alors en intégrant par parties nous avons que

$$\int_a^b e^{-x} x^y dx = \left[ x^y (-e^{-x}) \right]_a^b - \int_a^b (-e^{-x}) y x^{y-1} dx \quad \text{où} \quad \begin{cases} u = x^y & du = yx^{y-1} dx \\ dv = e^{-x} dx & v = -e^{-x} \end{cases}$$

$$= \frac{a^y}{e^a} - \frac{b^y}{e^b} + y \int_a^b e^{-x} x^{y-1} dx. \quad (*)$$

Notons que

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{a^y}{e^a} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{b^y}{e^b} = 0.$$

Dans le cas de cette dernière limite, il suffit de procéder en utilisant la règle de l'Hopital comme dans la preuve de la proposition 12.1; alors que pour la première limite, il est nécessaire d'utiliser le fait que  $y > 0$ . En laissant  $a \rightarrow 0^+$  et  $b \rightarrow \infty$  dans (\*) et en utilisant ce qui précède, nous obtenons

$$\int_0^\infty e^{-x} x^y dx = y \int_0^\infty e^{-x} x^{y-1} dx,$$

c'est-à-dire que  $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$  pour  $y > 0$ .

Cette dernière propriété nous permet de prolonger la fonction gamma  $\Gamma(y)$  pour tous les nombres réels  $y$  sauf les entiers non positifs. Il suffit de procéder de la façon suivante: si  $-1 < y < 0$ , alors on pose  $\Gamma(y) = \Gamma(y+1)/y$  car alors  $y+1 > 0$ ; ensuite si  $-2 < y < -1$ , alors on pose encore  $\Gamma(y) = \Gamma(y+1)/y$  dans laquelle le numérateur n'est autre que le prolongement de  $\Gamma$ ; et on continue ce processus. Il faut noter que  $\Gamma(y)$  n'est pas défini si  $y$  est un entier non positif. En effet,  $\lim_{y \rightarrow n^+} \Gamma(y) = \infty$  et  $\lim_{y \rightarrow n^-} \Gamma(y) = -\infty$  si  $n$  est un entier pair et  $n \leq 0$ ; alors que  $\lim_{y \rightarrow n^+} \Gamma(y) = -\infty$  et  $\lim_{y \rightarrow n^-} \Gamma(y) = \infty$  si  $n$  est un entier impair et  $n \leq -1$ .

Proposition 12.3:

a)  $\Gamma(1) = 1$  et  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ;

b) Si  $n \in \mathbf{N}$ , alors  $\Gamma(n+1) = n!$ ;

c) Si  $n \in \mathbf{N}$ , alors  $\Gamma(n + (1/2)) = ((2n)! \sqrt{\pi}) / (4^n n!)$

Preuve: a) Pour la première équation, nous avons

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} x^{(1-1)} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[ -e^{-x} \right]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-b}) = 1.$$

Pour la seconde équation, nous avons

$$\Gamma(1/2) = \int_0^\infty e^{-x} x^{(1/2)-1} dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{-1/2} dx.$$

Maintenant si  $0 < a < b$ , nous avons après un changement de variables

$$\int_a^b e^{-x} x^{-1/2} dx = \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \exp(-u^2) 2 du \quad \text{où} \quad \begin{cases} u = x^{1/2} \\ du = (1/2)x^{-1/2} dx \end{cases}$$

Si  $a \rightarrow 0^+$  et  $b \rightarrow \infty$ , alors nous obtenons

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{-1/2} dx = 2 \int_0^\infty \exp(-u^2) du = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

à cause de l'exemple 12.3. On a donc  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ .

b) Par l'équation fonctionnelle, nous avons  $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$ . Nous allons montrer la formule  $\Gamma(n+1) = n!$  par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 0$ , alors  $\Gamma(0+1) = \Gamma(1) = 1 = 0!$  par a). Supposons la formule vérifiée pour  $n-1$  et considérons le cas  $n$ , c'est-à-dire que nous supposons que  $\Gamma((n-1)+1) = \Gamma(n) = (n-1)!$  est vérifié, alors  $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)! = n!$ . Donc b) est démontré.

c) Nous allons aussi démontrer la formule  $\Gamma(n+(1/2)) = ((2n)! \sqrt{\pi}) / (4^n n!)$  par récurrence sur  $n$ . Si  $n = 0$ , alors  $\Gamma(0+(1/2)) = \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} = ((2 \cdot 0)! \sqrt{\pi}) / (4^0 0!)$  par a). Supposons la formule vérifiée pour  $(n-1)$  et considérons  $n$ , c'est-à-dire que nous supposons que  $\Gamma((n-1)+(1/2)) = ((2(n-1))! \sqrt{\pi}) / (4^{n-1} (n-1)!)$  est vérifié, alors

$$\begin{aligned} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) &= \left(n - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n - \frac{1}{2}\right) = \left(n - \frac{1}{2}\right) \frac{(2(n-1))! \sqrt{\pi}}{4^{n-1} (n-1)!} \\ &= \frac{(2n-1)}{2} \frac{(2n-2)! \sqrt{\pi}}{4^{n-1} (n-1)!} = \frac{(2n)(2n-1)(2n-2)! \sqrt{\pi}}{(2n) 2 (4^{n-1}) (n-1)!} = \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{4^n n!}. \end{aligned}$$

Donc c) est démontré.

De ce qui précède, nous avons donc la table suivante:

$y =$	$1/2$	$1$	$3/2$	$2$	$5/2$	$3$	$7/2$	$4$	$9/2$	$5$	$\dots$
$\Gamma(y) =$	$\sqrt{\pi}$	$1$	$\sqrt{\pi}/2$	$1$	$3\sqrt{\pi}/4$	$2$	$15\sqrt{\pi}/8$	$6$	$105\sqrt{\pi}/16$	$14$	$\dots$

Il existe un lien entre la fonction gamma et la fonction zêta de Riemann. Rappelons que la fonction zêta de Riemann est définie pour  $s > 1$  par l'équation

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Nous n'avons pas discuté de convergence de séries dans ce cours. Mais il est possible de montrer que la somme infinie  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$  est bien définie si  $s > 1$ . Par exemple,

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \zeta(4) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

La fonction zêta de Riemann  $\zeta(s)$  est un outil essentiel pour étudier les nombres premiers et leur distribution. La relation entre  $\zeta(s)$  et les nombres premiers est donnée par le produit infini

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{(1 - p^{-s})}$$

dans lequel  $p$  parcourt l'ensemble des nombres premiers. Il est possible de définir la fonction zêta pour d'autres nombres que des nombres réels supérieurs à 1, mais nous ne discuterons pas de ceci. Nous nous limiterons à décrire une représentation intégrale de la fonction zêta.

**Proposition 12.4** (Représentation intégrale de  $\zeta(s)$ ):

Si  $s > 1$ , alors

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^{\infty} \frac{x^{s-1}}{(e^x - 1)} dx.$$

Preuve: Dans ce qui suit, on suppose que  $s > 1$ . Dans l'intégrale impropre définissant la fonction gamma, nous allons effectuer un changement de variables.

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} (nu)^{s-1} e^{-nu} n du \quad \text{où} \begin{cases} x = nu \\ dx = n du \end{cases} \quad \text{et } n \in \mathbf{N}, n > 0 \\ &= n^s \int_0^{\infty} u^{s-1} e^{-nu} du. \end{aligned}$$

On a donc

$$n^{-s} \Gamma(s) = \int_0^\infty u^{s-1} e^{-nu} du.$$

Alors

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty n^{-s} \Gamma(s) &= \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty u^{s-1} e^{-nu} du = \int_0^\infty u^{s-1} \left( \sum_{n=1}^\infty e^{-nu} \right) du \\ &= \int_0^\infty \frac{u^{s-1} e^{-u}}{(1-e^{-u})} du = \int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{(e^u - 1)} du. \end{aligned}$$

Noter que l'égalité entre le terme le plus à droite de la première ligne d'égalités ci-dessus avec son prédécesseur n'est pas si évidente et sa preuve nécessite l'étude de la convergence de la série et de l'intégrale et fait partie d'un cours d'analyse. Nous avons aussi utilisé le résultat suivant:  $\sum_{n=1}^\infty v^n = v/(1-v)$  si  $v$  est tel que  $|v| < 1$ .

Il est possible de vérifier que la fonction gamma  $\Gamma(y)$  est continue sur l'intervalle  $(0, \infty)$  et son prolongement est aussi continu sur  $\mathbf{R} \setminus \{n \in \mathbf{Z} \mid n \leq 0\}$ . Il est aussi possible de dériver la fonction gamma.

Proposition 12.5:

La dérivée de la fonction gamma est

$$\Gamma'(y) = \int_0^\infty e^{-x} x^{y-1} \ln(x) dx.$$

Preuve:

$$\Gamma'(y) = \frac{d}{dy} \int_0^\infty e^{-x} x^{y-1} dx = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial y} \left( e^{-x} x^{y-1} \right) dx = \int_0^\infty e^{-x} \frac{\partial(x^{y-1})}{\partial y} dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{y-1} \ln(x) dx.$$

Noter que l'égalité entre le troisième terme de ces égalités ci-dessus avec son prédécesseur n'est pas si évidente et sa preuve nécessite l'étude de la convergence des intégrales et fait partie d'un cours d'analyse.

Il est possible de montrer que la  $n$ -ième dérivée de  $\Gamma$  est

$$\Gamma^{(n)}(y) = \int_0^\infty e^{-x} x^{y-1} (\ln(x))^n dx.$$

Proposition 12.6:

L'intégrale  $\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$  existe pour tout  $p, q > 0$ .

Preuve: Notons premièrement que si  $p, q \geq 1$ , alors l'intégrale ci-dessus est une intégrale propre. Par contre si  $0 < p < 1$  ou encore  $0 < q < 1$ , alors nous avons affaire à une intégrale impropre. Si  $0 < p < 1$  et  $q \geq 1$ , alors  $x^{p-1} (1-x)^{q-1} \leq x^{p-1}$  pour tout  $x \in (0, 1]$ , car  $0 \leq (1-x)^{q-1} \leq 1$ . En utilisant le lemme 12.1 b) et, comme nous l'avons vu à l'exemple 12.6,  $\int_0^1 x^{p-1} dx$  existe, alors nous obtenons que  $\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$  existe. Si  $p \geq 1$  et  $0 < q < 1$ , alors  $x^{p-1} (1-x)^{q-1} \leq (1-x)^{q-1}$  pour tout  $x \in [0, 1)$ , car  $0 \leq x^{p-1} < 1$ . En utilisant une variante du lemme 12.1 b), et parce que  $\int_0^1 (1-x)^{q-1} dx$  existe, alors nous obtenons que  $\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$  existe. Finalement si  $0 < p < 1$  et  $0 < q < 1$ , alors la fonction  $x^{p-1} (1-x)^{q-1}$  n'est pas définie aux deux extrémités de l'intervalle  $[0, 1]$ . Il faut considérer séparément ces deux cas. Nous avons donc

$$\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \int_0^{1/2} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

et il nous faut vérifier que ces deux intégrales impropres existent. Notons premièrement qu'il existe un nombre réel positif  $M$  tel que  $0 \leq (1-x)^{q-1} \leq M$  pour tout  $x$  tel que  $0 \leq x \leq (1/2)$ . De ceci, nous avons  $0 \leq x^{p-1} (1-x)^{q-1} \leq M x^{p-1}$  si  $0 \leq x \leq (1/2)$  et comme l'intégrale  $\int_0^{1/2} M x^{p-1} dx$  existe, nous obtenons que  $\int_0^{1/2} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$  existe en utilisant le lemme 12.1 b). Pour ce qui est de l'autre intégrale, il faut noter qu'il existe un nombre réel positif  $N$  tel que  $0 \leq x^{p-1} \leq N$  pour tout  $x$  tel que  $(1/2) \leq x \leq 1$ . De ceci, nous avons  $0 \leq x^{p-1} (1-x)^{q-1} \leq N(1-x)^{q-1}$  si  $(1/2) \leq x \leq 1$  et comme l'intégrale  $\int_{1/2}^1 N(1-x)^{q-1} dx$

existe, nous obtenons que  $\int_{1/2}^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$  existe en utilisant le lemme 12.1 b). La proposition est donc démontrée.

Cette intégrale présentée à la proposition 12.6 est la fonction bêta. Plus exactement la fonction bêta est la fonction de deux variables définie par

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$$

pour  $p, q > 0$ . Comme nous venons de le vérifier, cette intégrale impropre existe. Nous pourrions énumérer quelques propriétés de cette fonction, par exemple  $B(p, q) = B(q, p)$ , etc. Nous n'allons démontrer qu'une seule propriété de cette fonction, c'est sa relation avec la fonction gamma.

**Proposition 12.7:**

Soient  $p, q$  deux nombres réels positifs. Alors

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Preuve:

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left( \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx \right) \left( \int_0^\infty e^{-y} y^{q-1} dy \right) \\ &= \iint_{\text{premier quadrant}} x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy. \end{aligned}$$

Soit  $D$  le premier quadrant. Nous allons maintenant évaluer cette dernière intégrale double en utilisant un changement de coordonnées. Considérons les nouvelles coordonnées

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = x/(x + y). \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que ceci est un changement de coordonnées pour les points de  $D$ . Notons aussi que

$$\begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left| \begin{pmatrix} v & u \\ (1-v) & -u \end{pmatrix} \right| = -uv - (1-v)u = -u.$$

De même que le domaine  $D'$  correspondant à  $D$  dans les coordonnées  $u, v$  est  $D' = \{(u, v) \mid 0 \leq u, 0 \leq v \leq 1\}$ . Par le théorème 10.1, nous avons

$$\begin{aligned} \iint_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy &= \iint_{D'} (uv)^{p-1} (u(1-v))^{q-1} e^{-u} | -u | du dv \\ &= \iint_{D'} u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} du dv \\ &= \int_0^\infty \left( \int_0^1 u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} dv \right) du \\ &= \left( \int_0^\infty u^{p+q-1} e^{-u} du \right) \left( \int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv \right) = \Gamma(p+q) B(p, q). \end{aligned}$$

Parce que  $\Gamma(p+q) > 0$ , nous pouvons donc diviser par ce nombre et ainsi terminer la preuve de cette proposition.

Nous pourrions poursuivre notre étude des fonctions gamma et bêta. Mais pour conclure ce chapitre nous étudierons brièvement la transformée de Laplace. Il est souvent utile d'associer à une fonction  $f(x)$  définie sur  $\mathbf{R}$  une transformée intégrale  $g(y) = \int_{-\infty}^\infty K(x, y) f(x) dx$ , c'est-à-dire une nouvelle fonction d'une

nouvelle variable. Bien entendu l'intégrale impropre définissant  $g(y)$  n'existe pas toujours, mais pour certaines fonctions  $f(x)$ , elle a un sens. Les exemples les plus connus de telles transformations sont les suivants:

Transformée de Fourier exponentielle:	$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} f(x) dx$
Transformée de Fourier cosinus:	$\int_0^{\infty} \cos(xy) f(x) dx$
Transformée de Fourier sinus:	$\int_0^{\infty} \sin(xy) f(x) dx$
Transformée de Laplace:	$\int_0^{\infty} e^{-xy} f(x) dx$
Transformée de Mellin:	$\int_0^{\infty} x^{y-1} f(x) dx$

Nous étudierons seulement la transformée de Laplace. Il est possible de montrer que si  $\int_0^{\infty} e^{-cx} |f(x)| dx$  existe, alors  $\int_0^{\infty} e^{-xy} |f(x)| dx$  existe pour tout  $y$  tel que  $y \geq c$ . Nous noterons la fonction  $F(y) = \int_0^{\infty} e^{-xy} f(x) dx$  pour  $y > c$  par  $L(f)$ . Cette transformée est la transformée de Laplace de  $f$ . Le tableau suivant présente quelques-unes des transformées de Laplace de fonctions usuelles:

$f(x)$	$L(f)(y) = F(y)$	Intervalle de définition de $F$
$e^{ax}$	$1/(y - a)$	$y > a$
$\cos(ax)$	$y/(y^2 + a^2)$	$y > 0$
$\sin(ax)$	$a/(y^2 + a^2)$	$y > 0$
$x^p e^{ax}$ avec $p > 0$	$\Gamma(p + 1)/(y - a)^{p+1}$	$y > a$

Il est facile de démontrer ces formules. Par exemple, si  $f(x) = x^p e^{ax}$ , alors

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_0^{\infty} x^p e^{ax} e^{-xy} dx = \int_0^{\infty} x^p e^{-x(y-a)} dx \\ &= \int_0^{\infty} \left( \frac{u}{y-a} \right)^p e^{-u} \frac{1}{y-a} du \quad \text{en posant } u = x(y-a) \text{ et } du = (y-a)dx \\ &= \frac{1}{(y-a)^{p+1}} \int_0^{\infty} u^p e^{-u} du = \frac{\Gamma(p+1)}{(y-a)^{p+1}}. \end{aligned}$$

Nous ne présenterons que deux propriétés de la transformée de Laplace.

**Proposition 12.8** (Linéarité):

Soient  $a, b$  deux nombres réels,  $f(x), g(x)$  deux fonctions définies sur l'intervalle  $[0, \infty)$  telles que leurs transformées de Laplace  $L(f), L(g)$  existent pour  $y \geq c$ . Alors  $L(af + bg) = aL(f) + bL(g)$  sur l'intervalle  $[c, \infty)$ .

La preuve de cette proposition est très simple. Il suffit d'utiliser la linéarité de l'intégrale.

Soient  $f(x), g(x)$  deux fonctions définies sur  $\mathbf{R}$  et qui ne peuvent prendre des valeurs non nulles que sur l'intervalle  $[0, \infty)$ . On peut alors définir une troisième fonction appelée la convolution de  $f$  et  $g$  et que l'on note  $f * g$  par la formule

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t) g(x-t) dt.$$

**Proposition 12.9:**

Soient  $f$  et  $g$  comme dans le paragraphe précédent. Alors  $L(f * g) = L(f)L(g)$ .

Preuve: Il suffit de faire un changement de coordonnées. On a

$$\begin{aligned} (L(f)L(g))(y) &= (L(f)(y))(L(g)(y)) = \left( \int_0^{\infty} f(s) e^{-sy} ds \right) \left( \int_0^{\infty} g(t) e^{-ty} dt \right) \\ &= \iint_{\text{premier quadrant}} f(s) g(t) e^{-(s+t)y} ds dt = (\dagger). \end{aligned}$$

Considérons les nouvelles coordonnées

$$\begin{cases} u = s + t \\ v = s \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que ceci est un changement de coordonnées. De plus, nous obtenons

$$\begin{cases} s = v \\ t = u - v \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial(s, t)}{\partial(u, v)} = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right| = -1 \quad \text{et}$$

que le domaine correspondant dans le plan  $u, v$  au premier quadrant du plan  $s, t$  sera

$$D' = \{(u, v) \mid v \geq u \geq 0\}.$$

Donc

$$\begin{aligned} (\dagger) &= \iint_{D'} f(v) g(u - v) e^{-uy} | -1 | du dv = \int_0^\infty \left( \int_0^u f(v) g(u - v) e^{-uy} dv \right) du \\ &= \int_0^\infty e^{-uy} \left( \int_0^u f(v) g(u - v) dv \right) du = \int_0^\infty (f * g)(u) e^{-uy} du = L(f * g)(y). \end{aligned}$$

La proposition est donc démontrée.

Exemple 12.9:

Si

$$f(x) = g(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{sinon;} \end{cases}$$

alors

$$(f * g)(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ (2 - x) & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet si  $0 \leq x \leq 1$ , alors  $\int_0^x f(u)g(x - u)du = \int_0^x du = x$ . Si  $1 \leq x \leq 2$ , alors  $\int_0^x f(u)g(x - u)du = \int_0^1 g(x - u)du = \int_{x-1}^1 du = (2 - x)$ . Si  $x \geq 2$ , alors  $\int_0^x f(u)g(x - u)du = \int_0^1 g(x - u)du = 0$  car  $x - 1 > 1$ . Nous pouvons calculer la transformée de Laplace dans ce cas-ci.

$$L(f)(y) = \int_0^\infty f(x)e^{-xy} dx = \int_0^1 e^{-xy} dx = \left( \frac{-e^{-xy}}{y} \right) \Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1 - e^{-y}}{y} \quad \text{si } y \neq 0.$$

Donc  $L(f * g)(y) = ((1 - e^{-y})/y)^2$  si  $y \neq 0$ .

★ ★ ★

Exercice 12.1:

Pour chacune des intégrales impropres suivantes, indiquer si elle existe et, si oui, évaluer celle-ci.

a)  $\int_{-1}^1 1/(1 - x^2) dx$

b)  $\int_{-1}^1 1/(1 - x^2)^2 dx$

c)  $\int_{-1}^1 1/(1 - x^2)^{1/2} dx$

d)  $\int_2^\infty 1/(x^2 - 2) dx$

e)  $\int_0^\infty 1/(x^2 + 2x + 2) dx$

f)  $\int_0^\infty ((\pi/2) - \arctan(x)) dx$

g)  $\int_0^1 \ln(1 - t^2)/t^2 dt$

h)  $\int_0^\infty t^2/(1 + t^4) dt$

- i) (†)  $\int_0^1 t^{-3/4}/(1-t)^{1/4} dt$   
 j) (†)  $\int_0^1 t^{1/4}/(1-t)^{1/4} dt$

Exercice 12.2:

Indiquer pour quelles valeurs de  $s$ , les intégrales suivantes existent et, déterminer pour ces valeurs, l'intégrale impropre.

- a)  $\int_0^\infty e^{-sx} \cos(ax) dx$   
 b)  $\int_0^\infty e^{-sx} \sin(ax) dx$

Exercice 12.3:

En supposant que  $\int_0^\infty \sin(x)/x dx = \pi/2$ , évaluer chacune des intégrales impropres suivantes.

- a)  $\int_0^\infty \sin(x) \cos(x)/x dx$   
 b)  $\int_0^\infty \sin^2(x)/x^2 dx$   
 c)  $\int_0^\infty \sin^4(x)/x^2 dx$   
 d)  $\int_0^\infty \sin^4(x)/x^4 dx$

Exercice 12.4:

Posons  $R = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$  avec  $a, b > 0$ .

- a) Calculer l'intégrale  $\int_0^b e^{-xy} \sin(y) dy$ .  
 b) Calculer de deux façons différentes  $I(a, b) = \iint_R e^{-xy} \sin(y) dx dy$ .  
 c) Calculer, pour  $b$  fixé,  $\lim_{a \rightarrow \infty} I(a, b)$ . En déduire la valeur de  $\int_0^\infty \sin(x)/x dx$ .

Exercice 12.5 (†):

Etudier pour quelles valeurs réelles de  $\alpha$  et  $\beta$  l'intégrale suivante  $\int_0^1 t^\alpha |\ln(t)|^\beta dt$  est bien définie. Calculer cette intégrale (lorsqu'elle est bien définie) dans le cas où  $\beta \in \mathbf{N}$ .

Exercice 12.6 (†):

Soit  $a$ , un nombre réel positif  $a > 0$ . Montrer que pour tout entier  $n \geq 1$ , l'intégrale

$$I(n) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+t^a)^{n+(1/a)}} dt$$

converge. Calculer  $I(n)$  en déterminant premièrement une relation de récurrence entre  $I(n)$  et  $I(n+1)$ .

Exercice 12.7 (†):

- a) Montrer que l'intégrale  $\int_0^\pi \ln(\sin(t)) dt$  est bien définie.  
 b) Montrer que les intégrales

$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t)) dt, \quad \int_{\pi/2}^\pi \ln(\sin(t)) dt, \quad \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt$$

sont bien définies et ont même valeur.

- c) En déduire que  $\int_0^\pi \ln(\sin(t)) dt = -\pi \ln(2)$  et  $\int_0^\pi t \ln(\sin(t)) dt = -\pi^2 \ln(2)/2$ .