CHAPITRE 9

L'équation d'onde pour une membrane circulaire.

Dans tous les problèmes considérés jusqu'à présent, nous avons obtenu après avoir séparé les variables l'équation différentielle ordinaire suivante: $X'' + \lambda X = 0$ avec les conditions $X(0) = 0$, $X(\ell) = 0$. Dans les étapes subséquentes de la méthode de séparation de variables, nous avons ensuite déterminé les constantes λ qui font en sorte que les solutions X ne soient pas triviales (ce sont les valeurs propres) et les solutions X_λ pour chacune de ces valeurs propres λ. Dans la dernière étape, nous terminons en utilisant l'orthogonalité de ces fonctions caractéristiques pour exprimer certaines fonctions comme des séries de Fourier. Cette situation est plus générale que ce que nous avons vu jusqu'à maintenant. C'est ce qui est convenu d'appeler les problèmes (des valeurs propres) de Sturm-Liouville. Sturm (mathématicien français d'origine suisse, Genève, 1803 - Paris, 1855) a entre autres mesuré la vitesse du son dans l'eau et a énoncé un théorème précisant le nombre de racines réelles d'un polynôme à coefficients réels dans un intervalle quelconque. Liouville (mathématicien français, Saint-Omer, 1809 - Paris, 1882) a été l'un des principaux analystes de son temps.

Nous allons maintenant considérer un problème d'EDP, l'équation d'onde pour une membrane circulaire, pour lequel ce ne sont plus des fonctions trigonométriques qui apparaissent comme fonction caractéristique, mais plutôt des fonctions de Bessel (astronome allemand, Minden, 1784 - Königsberg, 1846). Nous rappellerons ce que sont ces fonctions plus tard. Un point important est que ces fonctions satisfont aussi des relations d'orthogonalité. La preuve de ceci sera faite au prochain chapitre lorsque nous discuterons justement des problèmes de Sturm-Liouville.

Soient un nombre R réel positif > 0, le disque $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ centré à l'origine de rayon R et le bord $\partial D = \{(x, y) \in D \mid x^2 + y^2 = R^2\}$ du disque. Considérons le problème d'EDP suivant:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \qquad \text{où } u = u(x, y, t) \qquad \text{avec } (x, y) \in D,\ t \geq 0,$$

pour lequel la condition à la frontière est $u(x, y, t) = 0$ pour tout $(x, y) \in \partial D$ et $t \geq 0$ et les conditions initiales sont $u(x, y, 0) = f(x, y)$ et $\dfrac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = g(x, y)$ pour tout $(x, y) \in D$. $f(x, y)$ est le déplacement initial et $g(x, y)$ est la vitesse initiale de la membrane circulaire.

Il est préférable d'écrire le problème en coordonnées polaires plutôt qu'en coordonnées cartésiennes, notamment parce que la condition à la frontière s'écrit simplement dans ces coordonnées . Rappelons ce que sont les coordonnées polaires. À un point P du plan, nous pouvons associer deux nombres réels (r, θ), $r \geq 0$ et $0 \leq \theta < 2\pi$, où r est la distance entre le point P et l'origine $O = (0, 0)$ et θ est la mesure (en radians) de l'angle fait par la demi-droite des x positifs et la demi-droite passant par P issue de l'origine O. Si (x, y) (respectivement (r, θ)) sont les coordonnées cartésiennes (respectivement polaires) de P, alors

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta); \\ y = r\sin(\theta); \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ \theta = \arctan(y/x). \end{cases}$$

L'équation d'onde

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

devient l'EDP suivante en coordonnées polaires:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

En effet, par la règle de chaînes, nous avons

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{y}{(x^2+y^2)}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = \cos(\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) - \frac{\sin(\theta)}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right);$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{x}{(x^2+y^2)}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = \sin(\theta)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\cos(\theta)}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right);$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos(\theta)\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial x}\\
&= \cos(\theta)\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos(\theta)\ \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r}\ \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) - \frac{\sin(\theta)}{r}\ \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos(\theta)\ \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin(\theta)}{r}\ \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\\
&= \cos^2(\theta)\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r}\ \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{\sin^2(\theta)}{r^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\sin^2(\theta)}{r}\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\ \frac{\partial u}{\partial \theta} \qquad \text{et}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\frac{\partial \theta}{\partial y}\\
&= \sin(\theta)\ \frac{\partial}{\partial r}\left(\sin(\theta)\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r}\ \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{\cos(\theta)}{r}\ \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos(\theta)}{r}\ \frac{\partial u}{\partial \theta}\right)\\
&= \sin^2(\theta)\ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r}\ \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{\cos^2(\theta)}{r^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2(\theta)}{r}\ \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{2\sin(\theta)\cos(\theta)}{r^2}\ \frac{\partial u}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

En substituant dans l'EDP

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

nous obtenons

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

La condition à la frontière $u(x, y, t) = 0$ pour tout $(x, y) \in \partial D$ et $t \geq 0$ devient $u(R, \theta, t) = 0$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et $t \geq 0$.

Dans ce qui suivra, nous avons noté le déplacement vertical initial et la vitesse initiale en fonction des coordonnées polaires respectivement par $\tilde{f}(r, \theta)$ et $\tilde{g}(r, \theta)$, i.e.

$$\tilde{f}(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \quad \text{et} \quad \tilde{g}(r, \theta) = g(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Nous avons ainsi le problème d'EDP suivant:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\ \frac{\partial u}{\partial r}\right) \qquad \text{où } u = u(r, \theta, t),\ 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq \theta < 2\pi,\ t \geq 0,$$

avec la condition à la frontière

$$u(R, \theta, t) = 0 \quad \text{pour tout } \theta \in [0, 2\pi] \quad \text{et} \quad t \geq 0$$

et les conditions initiales

$$u(r, \theta, 0) = \tilde{f}(r, \theta) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) = \tilde{g}(r, \theta) \quad \text{pour } 0 \leq r \leq R \quad \text{et} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Nous allons étudier dans ce chapitre une situation plus restreinte que celle ci-dessus. Nous supposerons que le déplacement initial et la vitesse initiale sont indépendantes de θ. En d'autres mots, le déplacement initial et la vitesse initiale sont circulairement symétriques. Nous allons chercher à déterminer dans cette situation les solutions $u = u(r, \theta, t)$ qui sont indépendantes de θ. Si la solution u est indépendante de θ, alors

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

En substituant ceci dans l'EDP, nous obtenons

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right).$$

Si nous résumons, nous allons étudier le problème (plus restreint) suivant

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad \text{où } u = u(r, t)$$

avec la condition à la frontière

$$u(R, t) = 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

et les conditions initiales

$$u(r, 0) = \tilde{f}(r) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = \tilde{g}(r) \quad \text{pour } 0 \leq r \leq R.$$

Nous supposons aussi que, pour tout $t = t_0$ fixé, la fonction $r \mapsto u(r, t_0)$ est bornée si $r \in [0, R]$. Cette condition correspond au fait qu'en tout temps le déplacement vertical de la membrane est borné.

Nous allons utiliser la méthode de séparation de variables. Dans cette méthode, il nous faut dans un premier temps étudier un problème intermédiaire. Dans le cas présent, ce problème est

$$(*) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial u}{\partial r} \right) \quad \text{avec la condition } u(R, t) = 0, \text{ où } u = u(r, t), \ 0 \leq r \leq R, \ t \geq 0. \end{cases}$$

Nous cherchons ensuite à déterminer des solutions non triviales u de la forme spéciale $u(r, t) = F(r)G(t)$. En substituant cette solution dans l'EDP et en séparant les variables, nous obtenons

$$FG'' = c^2(F''G + r^{-1}F'G) \quad \Rightarrow \quad \frac{G''}{c^2 G} = \frac{F''}{F} + \frac{F'}{rF}.$$

Cette dernière équation est obtenue en divisant les deux côtés de la première équation par c^2FG. Ici F' et F'' désignent les dérivées première et seconde de F par rapport à r, alors que G'' désigne la dérivée seconde de G par rapport à t. Parce que le terme de gauche de la dernière équation est une fonction de t seulement et celui de droite, une fonction de r seulement, alors ces deux termes doivent être égaux à une constante λ. Nous avons donc

$$\frac{G''}{c^2 G} = \frac{F''}{F} + \frac{F'}{rF} = \lambda \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} rF'' + F' - \lambda rF = 0; \\ G'' - \lambda c^2 G = 0. \end{cases}$$

La condition à la frontière $u(R, t) = 0$ pour tout $t \geq 0$ a conséquence que $u(R, t) = F(R)G(t) = 0$ pour tout $t \geq 0$. Comme nous cherchons des solutions non triviales, alors il existe une valeur de $t = t_0$ telle que $G(t_0) \neq 0$ et conséquemment $F(R) = 0$ en considérant $u(R, t_0) = F(R)G(t_0) = 0$. De plus, comme nous supposons aussi que la fonction $r \mapsto u(r, t_0)$ est bornée si $r \in [0, R]$ pour tout $t = t_0$ fixé, alors $F(r)$ est une fonction bornée sur l'intervalle $[0, R]$.

Ainsi nous avons le système suivant:

$$\begin{cases} r^2F'' + rF' - \lambda r^2 F = 0 \quad \text{avec } F(R) = 0 \text{ et } F(r) \text{ bornée sur } [0, R]; \\ G'' - \lambda c^2 G = 0. \end{cases}$$

Parce que $F(R) = 0$ et que $F(r)$ soit une fonction bornée sur l'intervalle $[0, R]$, alors il est possible de montrer que la constante $\lambda < 0$. Nous verrons cette preuve plus tard dans le chapitre. Nous allons pour l'instant admettre ceci et poursuivre notre exposition de la méthode de séparation de variables.

Notons $\lambda = -p^2$ où $p > 0$ et considérons aussi la nouvelle variable $s = pr$. Nous allons récrire l'équation $r^2F'' + rF' - \lambda r^2 F = 0$ en terme de cette nouvelle variable s. Nous obtenons de la règle de chaînes que

$$\frac{dF}{dr} = \frac{dF}{ds}\,\frac{ds}{dr} = p\frac{dF}{ds}, \quad \frac{d^2F}{dr^2} = \frac{d}{dr}\left(p\frac{dF}{ds}\right) = \frac{d}{ds}\left(p\frac{dF}{ds}\right)\frac{ds}{dr} = p^2\frac{d^2F}{ds^2}.$$

En substituant dans l'équation différentielle $r^2F'' + rF' + (pr)^2F = 0$, nous obtenons

$$\left(\frac{s}{p}\right)^2 p^2\frac{d^2F}{ds^2} + \left(\frac{s}{p}\right)p\frac{dF}{ds} + s^2F = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2\frac{d^2F}{ds^2} + s\frac{dF}{ds} + s^2F = 0.$$

Ceci est l'équation de Bessel de paramètre $\nu = 0$. (On dit aussi d'ordre $\nu = 0$.)

Nous allons maintenant rappeller ce qu'est l'équation de Bessel et ce que sont les fonctions de Bessel. L'**équation de Bessel de paramètre (ou ordre)** ν est

$$z^2\frac{d^2f}{dz^2} \;+\; z\frac{df}{dz} \;+\; (z^2 - \nu^2)f = 0. \qquad (\text{ éq. } [1])$$

Nous pouvons supposer que $\nu \geq 0$. C'est une équation linéaire homogène d'ordre 2. Conséquemment pour décrire toutes les solutions de l'équation [1], il nous faut déterminer deux solutions f_1 et f_2 linéairement indépendantes et toutes les solutions seront alors des combinaisons linéaires $Af_1 + Bf_2$.

Si $\mu \in \mathbf{R}$, nous noterons par $J_\mu(z)$, la série suivante

$$J_\mu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\mu \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^m}{(m!)\;\Gamma(\mu+m+1)}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \qquad \text{où} \qquad \Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-x}x^{y-1}dx$$

est la fonction gamma.

Lemme 1 a) La série

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^m}{(m!)\;\Gamma(\mu+m+1)}\right)\left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

converge pour tout $z \in \mathbf{R}$.

b) Si $\mu \geq 0$, alors $J_\mu(z)$ est définie pour tout $z \geq 0$.

c) Si $\mu \in \mathbf{Z}$, $\mu = -n < 0$ avec $n \in \mathbf{N}$, alors $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ et $J_{-n}(z)$ est définie pour tout $z \geq 0$.

d) Si $\mu < 0$ et $\mu \notin \mathbf{Z}$, alors $J_\mu(z)$ est définie pour tout $z > 0$ et

$$\lim_{z\to 0^+} J_\mu(z) = \begin{cases} \infty, & \text{si } \Gamma(\mu+1) > 0; \\ -\infty, & \text{si } \Gamma(\mu+1) < 0. \end{cases}$$

Preuve. a) Remplaçons $(z/2)^2$ par w et considérons la série (en w) ainsi obtenue

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^m}{(m!)\;\Gamma(\mu+m+1)}\right)w^m.$$

Le rayon de convergence ρ de cette dernière série est

$$\begin{aligned}\rho &= \lim_{m\to\infty}\left|\frac{((-1)^m/(m!)\;\Gamma(\mu+m+1))}{((-1)^{m+1}/(m+1)!\;\Gamma(\mu+m+2))}\right| = \lim_{m\to\infty}\left|\frac{(m+1)!\;\Gamma(\mu+m+2)}{m!\;\Gamma(\mu+m+1)}\right| \\ &= \lim_{m\to\infty}\big|\;(m+1)\;(\mu+m+1)\;\big| = \infty,\end{aligned}$$

à cause de l'équation fonctionnelle $\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$. De ceci, nous obtenons que la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{(m!)\ \Gamma(\mu+m+1)} \right) \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

converge pour tout $z \in \mathbf{R}$.

b) Si $\mu \geq 0$, alors

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\mu} \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{(m!)\ \Gamma(\mu+m+1)} \right) \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

sont définies pour tout $z \geq 0$. Donc $J_\mu(z)$ est bien définie pour tout $z \geq 0$.

c) Si $\mu = -n < 0$ avec $n \in \mathbf{N}$, alors

$$\frac{(-1)^m}{m!\ \Gamma(-n+m+1)} = 0 \quad \text{si } m = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

parce que $\Gamma(k) = \pm\infty$ si $k \in \mathbf{Z}$ et $k \leq 0$. Conséquemment

$$\begin{aligned}
J_{-n}(z) &= \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{(m!)\ \Gamma(-n+m+1)} \right) \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{m=n}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{(m!)\ \Gamma(-n+m+1)} \right) \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \\
&= \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{m+n}}{(m+n)!\ \Gamma(m+1)} \right) \left(\frac{z}{2}\right)^{2(m+n)} = (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^{n} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{\Gamma(m+n+1)\ m!} \right) \left(\frac{z}{2}\right)^{2m} \\
&= (-1)^n J_n(z)
\end{aligned}$$

parce que $\Gamma(k+1) = k!$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. À cause de b), nous avons que $J_n(z) = (-1)^n J_n(z)$ est définie pour tout $z \geq 0$.

d) Si $\mu < 0$ et $\mu \in \mathbf{Z}$, alors

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\mu} \quad \text{et} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{(m!)\ \Gamma(\mu+m+1)} \right) \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

sont définies pour tout $z > 0$. Lorsque $z \to 0$, alors la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^m}{(m!)\ \Gamma(\mu+m+1)} \right) \left(\frac{z}{2}\right)^{2m}$$

approche $1/\Gamma(\mu+1)$ et comme μ n'est pas un entier cette dernière valeur est bornée. Mais la fonction

$$\left(\frac{z}{2}\right)^{\mu}$$

diverge vers ∞ si $z \to 0^+$ parce que μ est strictement négatif. Ceci complète la preuve de d). □

La fonction $J_\mu(z)$ est la **fonction de Bessel du premier type de paramètre (ou encore d'ordre μ)**. Nous avons tracé à la figure [1] le graphe des fonctions $J_{1/2}(z)$ et $J_{3/2}(z)$ pour $z \in [0, 10]$ et à la figure [2] le graphe des fonctions $J_{-1/2}(z)$ et $J_{-3/2}(z)$ pour $z \in [0, 10]$.

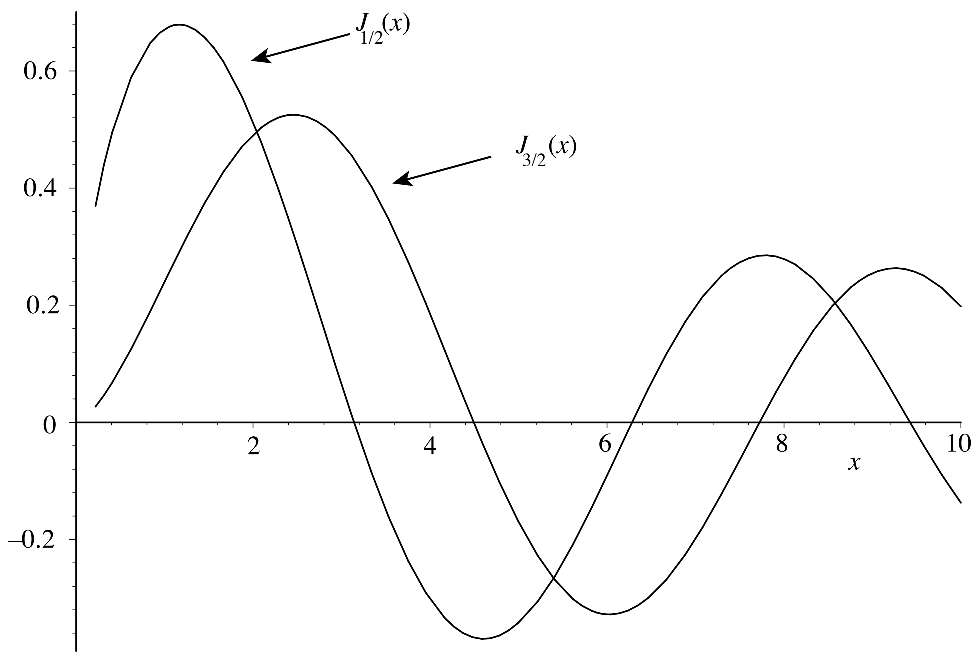

Figure [1]

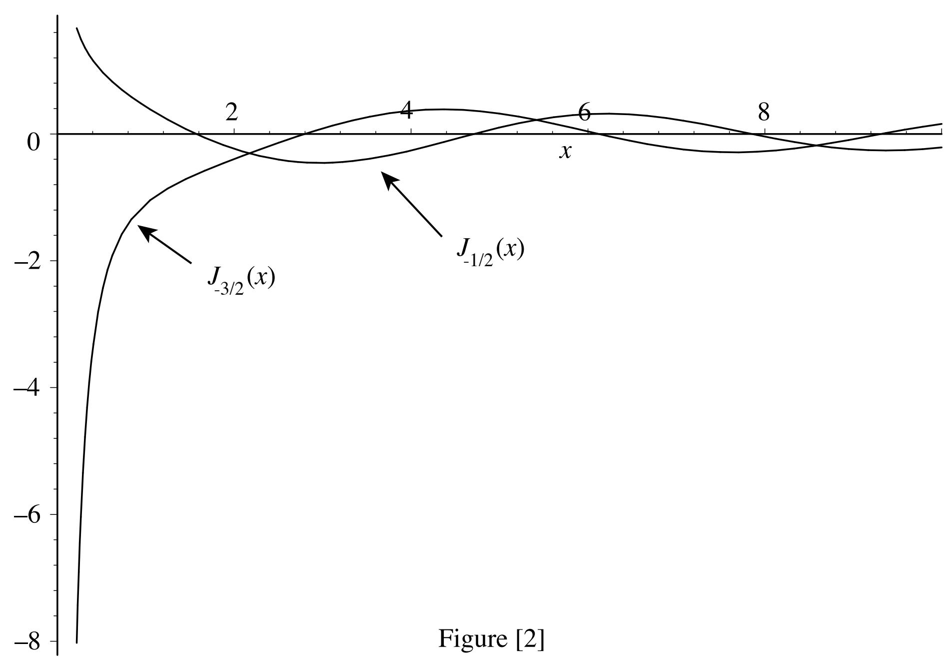

Figure [2]

Théorème 1 Si $\nu \notin \mathbf{Z}$, alors la solution générale de l'équation de Bessel (éq. [1]) est de la forme $AJ_\nu(z) + BJ_{-\nu}(z)$, où $J_\nu(z)$ et $J_{-\nu}(z)$ sont les fonctions de Bessel du premier type de paramètre ν et $-\nu$ respectivement et A, B sont des nombres réels quelconques.

Preuve. Il suffit de vérifier que les deux fonctions $J_\nu(z)$ et $J_{-\nu}(z)$ sont des solutions de l'équation [1] et qu'en plus elles sont linéairement indépendantes.

Nous avons que $z^2 J''_{\pm\nu}(z) + zJ'_{\pm\nu}(z) - (\pm\nu)^2 J_{\pm\nu}(z)$ est égale à

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m \pm \nu)(2m \pm \nu - 1)}{m!\, \Gamma(\pm\nu + m + 1) 2^{2m\pm\nu}} z^{2m\pm\nu} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m + \pm\nu)}{m!\, \Gamma(\pm\nu + m + 1) 2^{2m\pm\nu}} z^{2m\pm\nu}$$
$$- \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\pm\nu)^2}{m!\, \Gamma(\pm\nu + m + 1) 2^{2m\pm\nu}} z^{2m\pm\nu}.$$

Ainsi nous obtenons en regroupant les termes que $z^2 J''_{\pm\nu}(z) + zJ'_{\pm\nu}(z) - (\pm\nu)^2 J_{\pm\nu}(z)$ est égal à

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m [(2m \pm \nu)\ (2m \pm \nu - 1)\ +\ (2m \pm \nu)\ -\ (\pm\nu)^2]}{m!\, \Gamma(\pm\nu + m + 1)\ 2^{2m\pm\nu}}\ z^{2m\pm\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 4m\ (m \pm \nu)}{m!\, \Gamma(\pm\nu + m + 1)\ 2^{2m\pm\nu}}\ z^{2m\pm\nu}$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 4m\ (m \pm \nu)}{m!\, \Gamma(\pm\nu + m + 1)\ 2^{2m\pm\nu}}\ z^{2m\pm\nu} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} 4(m+1)\ (m \pm \nu + 1)}{(m+1)!\, \Gamma(\pm\nu + m + 2)\ 2^{2(m+1)\pm\nu}}\ z^{2m\pm\nu+2}$$
$$= (-1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\, \Gamma(\pm\nu + m + 1)\ 2^{2m\pm\nu}}\ z^{2m\pm\nu+2} = (-1) z^2 J_{\pm\nu}(z).$$

Nous obtenons donc que $z^2 J''_{\pm\nu}(z) + zJ'_{\pm\nu}(z) + (z^2 - (\pm\nu)^2) J_{\pm\nu}(z) = 0$. Ainsi $J_\nu(z)$ et $J_{-\nu}(z)$ sont des solutions de l'équation de Bessel d'ordre ν.

Pour montrer que les fonctions $J_\nu(z)$ et $J_{-\nu}(z)$ sont linéairement indépendantes, une façon est de calculer leur wronskien

$$W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) = \begin{vmatrix} J_\nu(z) & J_{-\nu}(z) \\ J'_\nu(z) & J'_{-\nu}(z) \end{vmatrix}$$

et montrer que cette fonction n'est pas nulle. Nous ne ferons pas ce calcul dans ces notes, mais il est possible de montrer que

$$W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) = \frac{-2\sin(\nu\pi)}{\pi z}.$$

Parce que $\nu \notin \mathbf{Z}$, alors $\sin(\nu\pi) \neq 0$ et le wronskien $W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z))$ est non nul. De ceci, nous pouvons conclure que $J_\nu(z)$ et $J_{-\nu}(z)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation de Bessel de paramètre ν et que la solution générale de cette équation est $AJ_\nu(z) + BJ_{-\nu}(z) \quad (\text{si } \nu \notin \mathbf{Z})$. □

Nous n'avons pas expliqué comment ces fonctions ont été obtenues. Il faut utiliser la méthode de Frobenius, i.e. que nous supposons que la solution est de la forme $z^\mu \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^m$ avec $a_0 \neq 0$, en dérivant terme-à-terme et en remplaçant dans l'équation de Bessel de paramètre ν, nous obtenons

$$a_0(\mu^2 - \nu^2)\ z^\mu + a_1(\mu^2 + 2\mu + 1 - \nu^2)\ z^{\mu+1} + \sum_{m=2}^{\infty} a_m[(m+\mu)^2 - \nu^2] + a_{m-2} z^{m+\mu} = 0.$$

Chacun des coefficients devant les $z^{m+\mu}$ doit être 0. Comme $a_0 \neq 0$ et que $a_0(\mu^2 - \nu^2) = 0$, nous pouvons conclure que $\mu = \nu$ ou $-\nu$. Si nous considérons maintenant $a_1(\mu^2 + 2\mu + 1 - \nu^2) = 0$ pour $\mu = \nu$ ou $-\nu$, nous obtenons $a_1 = 0$. Plus précisément si $\nu \neq -1/2$, nous obtenons que $a_1 = 0$. Si $\nu = -1/2$, nous pourrions avoir $a_1 \neq 0$, mais dans ce cas, la somme $z^{-1/2} \sum_m a_m z^m$, avec m impair dans la somme, sera un multiple de $J_{1/2}(z)$. Comme ses termes sont déjà pris en compte, nous pouvons aussi supposer dans ce cas de $\nu = -1/2$ que $a_1 = 0$. Finalement de $a_m[(m+\mu)^2 - \nu^2] + a_{m-2} = 0$, nous obtenons la relation de récurrence

$$a_m = \frac{-1}{(m \pm \nu)^2 - \nu^2}\ a_{m-2} \qquad \text{si } m \geq 2.$$

De ceci et du fait que $a_1 = 0$, nous obtenons facilement que $a_m = 0$ si m est impaire. Nous obtenons $J_\nu(z)$ et $J_{-\nu}(z)$ en prenant

$$a_0 = \frac{1}{2^{\pm\nu}\Gamma(\pm\nu + 1)}$$

dans la relation de récurrence et en calculant a_m pour tout entier m pair.

Le théorème 1 nous est que partiellement utile. En effet ce que nous avons à résoudre c'est plutôt l'équation de Bessel de paramètre $\nu = 0$. Si $\nu = n \in \mathbf{N}$, alors les fonctions $J_n(z)$ et $J_{-n}(z)$ sont bien des solutions de l'équation de Bessel de paramètre ν, mais ces deux fonctions sont linéairement dépendantes. En effet, comme nous l'avons noté dans la preuve du théorème 1, le wronskien dans ce cas est

$$W(J_n(z), J_{-n}(z)) = \frac{-2\sin(n\pi)}{\pi z} = 0.$$

Nous avons vérifié au lemme 1 c) que $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$. Il nous faut donc déterminer une autre solution linéairement indépendante de $J_n(z)$ pour nous permettre d'écrire la solution générale de l'équation de Bessel de paramètre $\nu = n \in \mathbf{N}$.

Nous définissons **la fonction de Bessel du deuxième type de paramètre n** comme étant la limite

$$Y_n(z) = \lim_{\nu \to n} \left(\frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} \right).$$

Théorème 2 Si $\nu = n \in \mathbf{Z}$, alors la solution générale de l'équation de Bessel (éq. [1]) est de la forme $AJ_n(z) + BY_n(z)$, où $J_n(z)$ et $Y_n(z)$ sont respectivement les fonctions de Bessel du premier et deuxième type de paramètre n.

Preuve. Il suffit de vérifier que les deux fonctions $J_n(z)$ et $Y_n(z)$ sont des solutions de l'équation [1] et qu'en plus elles sont linéairement indépendantes. Nous savons déjà que $J_n(z)$ est une fonction. Pour ce qui est de $Y_n(z)$, nous avons que si $\nu \in \mathbf{R}$, alors

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}$$

est aussi une solution de l'équation de Bessel de paramètre ν parce que cette équation est linéaire homogène et que $J_\nu(z)$ et $J_{-\nu}(z)$ sont des solutions. Ainsi

$$z^2 Y_\nu''(z) + zY_\nu'(z) + (z^2 - \nu^2)Y_\nu(z) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{\nu \to n} z^2 Y_\nu''(z) + zY_\nu'(z) + (z^2 - \nu^2)Y_\nu(z) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$z^2 Y_n''(z) + zY_n'(z) + (z^2 - n^2)Y_n(z) = 0$$

Disons qu'ici nous trichons un peu. Parce que nous supposons que

$$\lim_{\nu \to n} Y_\nu'(z) = \left(\lim_{\nu \to n} Y_\nu(z)\right)' = Y_n'(z) \quad \text{et} \quad \lim_{\nu \to n} Y_\nu''(z) = \left(\lim_{\nu \to n} Y_\nu(z)\right)'' = Y_n''(z).$$

Mais il y a une autre façon de procéder. Il est possible de déterminer $Y_n(z)$. En effet,

$$\begin{aligned} Y_n(z) = &-\frac{(z/2)^{-n}}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(n-m-1)!}{m!} \left(\frac{z^2}{4}\right)^m + \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{z}{2}\right) J_n(z) \\ &- \frac{(z/2)^n}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} [\psi(m+1) + \psi(n+m+1)] \frac{(-z^2/4)^m}{m!(n+m)!} \end{aligned}$$

où

$$\psi(1) = -\gamma \text{ (constante d'Euler) i.e } \gamma = \lim_{i \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{i} - \ln(i)\right) = 0.57721566490\ldots$$

$$\psi(k) = -\gamma + \sum_{m=1}^{k-1} \left(\frac{1}{k}\right) \qquad \text{pour } k \geq 2.$$

De cette expression il est alors possible de vérifier que $Y_n(z)$ est bien une solution de l'équation de Bessel de paramètre n. Nous laisserons à l'étudiant le soin de faire cette vérification.

Pour montrer que les fonctions $J_n(z)$ et $Y_n(z)$ sont linéairement indépendantes, une façon est de calculer leur wronskien

$$W(J_n(z), Y_n(z)) = \begin{vmatrix} J_n(z) & Y_n(z) \\ J_n'(z) & Y_n'(z) \end{vmatrix}$$

et montrer que cette fonction n'est pas nulle. Nous ne ferons pas ce calcul dans ces notes, mais il est possible de vérifier que

$$W(J_n(z), Y_n(z)) = \frac{2}{\pi z}.$$

Donc le wronskien $W(J_n(z), Y_n(z))$ est non nul. De ceci, nous pouvons conclure que $J_n(z)$ et $Y_n(z)$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation de Bessel de paramètre n et que la solution générale de cette équation est $AJ_n(z) + BY_n(z) \quad (\text{si } \nu = n \in \mathbf{N})$. □

Nous avons tracé à la figure [3] le graphe des fonctions $J_0(z)$, $J_1(z)$ et $J_2(z)$ pour $z \in [0, 10]$ et à la figure [4] le graphe des fonctions $Y_0(z)$ et $Y_1(z)$ pour $z \in [0, 10]$.

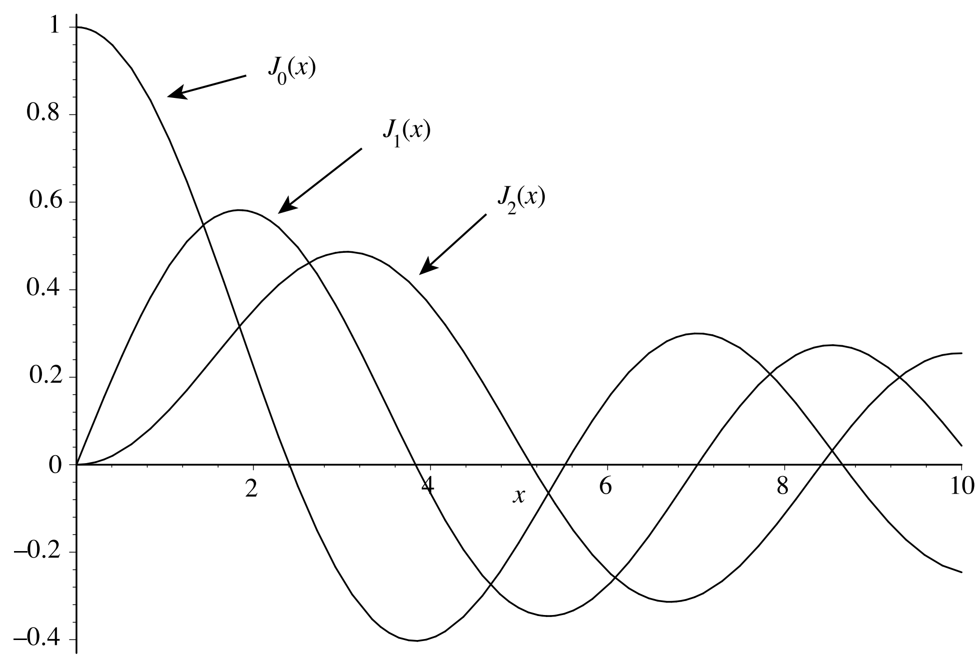

Figure [3]

Cette dernière figure illustre un point qui sera important pour nous, c'est que la limite de $Y_n(z)$ approche $-\infty$ si z approche 0^+. En effet,

$$\lim_{z \to 0^+} Y_n(z) = \lim_{z \to 0^+} \lim_{\nu \to n} \left(\frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} \right) = \lim_{\nu \to n} \lim_{z \to 0^+} \left(\frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} \right) = -\infty$$

parce que $J_\nu(0) = 1$ si $\nu = 0$ et 0 si $\nu \neq 0$, alors que $\lim_{z \to 0^+} J_{-\nu}(z) = \infty$ si $\Gamma(-\nu+1) > 0$ et $= -\infty$ si $\Gamma(-\nu+1) < 0$. Mais $\Gamma(-\nu+1) > 0$ si et seulement si $\sin(\nu\pi) > 0$. Nous obtenons bien que $\lim_{z \to 0^+} Y_n(z) = -\infty$. Dans cet argument, nous trichons un peu parce qu'à un certain point nous intervertissons la limite lorsque z approche 0^+ et la limite lorsque ν approche n. Une autre façon de vérifier que $Y_n(z)$ approche $-\infty$ est de considérer l'expression donné à la page 82 de $Y_n(z)$. Cette expression contient entre autres un terme de la forme $2\ln(z/2)J_n(z)/\pi$ et ce dernier diverge vers $-\infty$ lorsque $z \to 0^+$.

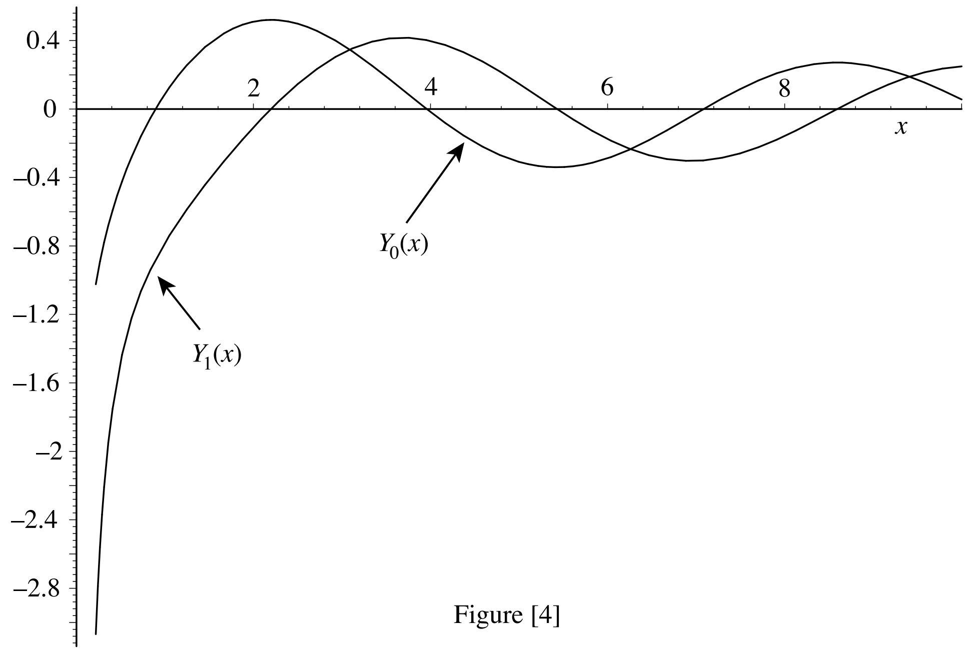

Figure [4]

Il est possible de montrer que si les valeurs de z sont près de 0, alors

$$J_0(z) \approx 1, \quad J_1(z) \approx z/2, \quad J_2(z) \approx z^2/8, \quad Y_0(z) \approx 2\ln(z)/\pi, \quad Y_1(z) \approx -2/(\pi z), \quad Y_2(z) \approx -4/(\pi z^2).$$

Pour des valeurs de z très grandes, $(z \to \infty)$, alors

$$J_n(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad Y_n(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right).$$

Il y aurait encore beaucoup à écrire, mais nous allons maintenant fermer notre parenthèse sur l'équation de Bessel et les fonctions de Bessel.

Si nous revenons à l'équation d'onde pour une membrane circulaire, nous en étions à l'équation suivante:

$$s^2\frac{d^2F}{ds^2} + s\frac{dF}{ds} + s^2F = 0.$$

Donc F comme fonction de s sera de la forme $AJ_0(s) + BY_0(s)$ où A et B sont des nombres réels, parce que ceci est la solution générale de l'équation de Bessel de paramètre $\nu = 0$. Comme $s = pr$, alors F comme fonction de r est $F(r) = AJ_0(pr) + BY_0(pr)$. Rappelons que F doit être une fonction bornée pour $r \in [0, R]$. Pour que ceci soit vérifié, il faut nécessairement que $B = 0$. Sinon comme la limite

$$\lim_{r \to 0^+} Y_0(pr) = -\infty,$$

F n'est pas bornée. Conséquemment $F(r) = AJ_0(pr)$. Nous pouvons supposer que $A \neq 0$ de façon à ne pas avoir une solution triviale.

Si nous considérons maintenant la condition $F(R) = 0$, alors $J_0(pR) = 0$, i.e. pR est un zéro de J_0. Rappelons qu'un nombre réel α est un zéro de J_0 si et seulement si $J_0(\alpha) = 0$. Il est possible de montrer que la fonction de Bessel J_0 a une infinité de zéros réels positifs: $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \ldots$. Il existe des tables des valeurs de ces zéros. Ainsi $\alpha_1 = 2.4048\ldots$, $\alpha_2 = 5.5201\ldots$, $\alpha_3 = 8.6537\ldots$, $\alpha_4 = 11.7915\ldots$, $\alpha_5 = 14.9309\ldots$ etc. Ces zéros sont disposés irrégulièrement. Donc $pR = \alpha_n$ pour un certain $n \geq 1$.

Conséquemment pour chaque valeur de $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$, nous avons

$$p_n = \left(\frac{\alpha_n}{R}\right), \quad \lambda_n = -p_n^2 = -\left(\frac{\alpha_n}{R}\right)^2 \text{ et } F_n(r) = J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right)$$

respectivement comme valeurs possibles de p, de λ et de F correspondant à cette valeur propre λ. Il nous reste à considérer l'équation différentielle

$$G'' - \lambda c^2 G = 0 \quad \Rightarrow \quad G'' + \left(\frac{c\alpha_n}{R}\right)^2 G = 0 \quad \text{pour } \lambda = \lambda_n.$$

La solution générale de cette équation est

$$G_n(t) = C\cos\left(\frac{c\alpha_n t}{R}\right) + D\sin\left(\frac{c\alpha_n t}{R}\right).$$

De tout ce qui précède et en remplacant AC et AD par a_n et b_n, nous obtenons que

$$J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right)\left[a_n\cos\left(\frac{c\alpha_n t}{R}\right) + b_n\sin\left(\frac{c\alpha_n t}{R}\right)\right]$$

est une solution du problème intermédiaire

$$(*) \quad \left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad \text{avec la condition } u(R,t) = 0.\right.$$

Comme cette EDP est linéaire homogène et que la condition à la frontière est aussi homogène, nous pouvons alors utiliser le principe de superposition pour obtenir la solution formelle

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right)\left[a_n\cos\left(\frac{c\alpha_n t}{R}\right) + b_n\sin\left(\frac{c\alpha_n t}{R}\right)\right]$$

du problème $(*)$.

Si nous voulons en plus qu'une telle solution satisfasse aussi les conditions initiales, nous voulons donc que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) = \tilde{f}(r) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{c\alpha_n}{R}\right) b_n J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) = \tilde{g}(r) \quad \text{pour tout } r \in [0,R].$$

En conclusion, si nous voulons complètement déterminer le déplacement vertical d'une membrane circulaire, il nous faut pouvoir exprimer les fonctions $\tilde{f}(r)$ et $\tilde{g}(r)$ comme des sommes de fonctions $J_0(\frac{\alpha_n r}{R})$. On dit que de telles sommes sont des séries de Fourier-Bessel.

Nous verrons plus tard que

$$a_n = \left(\frac{2}{R^2 J_1^2(\alpha_n)}\right)\int_0^R r\tilde{f}(r)J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right)dr \quad \text{et} \quad b_n = \left(\frac{2}{c\alpha_n R J_1^2(\alpha_n)}\right)\int_0^R r\tilde{g}(r)J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right)dr$$

pour $n \in \mathbf{N}, n \geq 1$.

Nous obtenons facilement ce qui précède en utilisant les relations d'orthogonalité pour les fonctions de Bessel. Nous allons maintenant seulement énoncer ses relations. Leur preuve sera faite au prochain chapitre sur les problèmes de Sturm-Liouville.

Si $0 < \alpha_{1m} < \alpha_{2m} < \alpha_{3m} < \ldots$ sont les zéros positifs (> 0) de la fonction de Bessel $J_m(z)$ de paramètre $m \in \mathbf{N}$ et $\lambda_{nm} = \alpha_{nm}/R$ pour $n = 1, 2, \ldots$, alors les fonctions suivantes $J_m(\lambda_{1m}z)$, $J_m(\lambda_{2m}z)$, $J_m(\lambda_{3m}z), \ldots$ forment un système orthogonal sur l'intervalle $[0,R]$ par rapport à la fonction de poids $p(z) = z$, i.e.

$$\int_0^R zJ_m(\lambda_{nm}z)J_m(\lambda_{km}z)\,dz = 0 \quad \text{si } k \neq n.$$

Il faut aussi utiliser la norme de ces fonctions, i.e.

$$||J_m(\lambda_{nm}z)||^2 = \int_0^R zJ_m^2(\lambda_{nm}z)\,dz = \frac{R^2}{2}J_{m+1}^2(\lambda_{nm}R).$$

Nous verrons aussi cette formule au prochain chapitre.

Pour clore ce chapitre, il nous faut encore montrer que la constante λ dans le problème

$$r^2F'' + rF' - \lambda r^2F = 0 \quad \text{avec } F(R) = 0 \text{ et } F \text{ bornée sur } [0, R]$$

ne peut être que strictement négative, i.e. $\lambda < 0$. Nous avons fait cette hypothèse dans notre étude du problème intermédiaire $(*)$, mais nous ne l'avons toujours pas vérifié. Il nous faut donc exclure les cas $\lambda = 0$ et $\lambda > 0$.

Si nous commençons par le cas $\lambda = 0$, alors $r^2F'' + rF' = 0$. Donc $F'(r) = cr^{-1}$ avec c une constante et $F(r) = c\ln(r) + c'$ où c' est une autre constante. Pour que F soit bornée sur $[0, R]$, alors $c = 0$. Parce que $F(R) = 0$, nous obtenons $c' = 0$. Ainsi si $\lambda = 0$, nous obtenons que $F \equiv 0$ et comme nous cherchons des solutions non triviales, nous pouvons exclure ce cas.

Si maintenant nous considérons le cas $\lambda = p^2$, alors notre équation différentielle devient $r^2F'' + rF' - (pr)^2F = 0$. En considérant la nouvelle variable $s = pr$, nous obtenons en utilisant la règle de chaînes

$$s^2\frac{d^2F}{ds^2} + s\frac{dF}{ds} - s^2F = 0.$$

Ceci est une équation différente de l'équation de Bessel. Nonobstant cette différence, ces équations ont aussi été bien étudiées. La solution générale est de la forme $AI_0(s) + BK_0(s)$ où les fonctions I_0 et K_0 sont les fonctions de Bessel modifiées. Il est connu que $I_0(z) > 0$ pour tout $z \geq 0$, $I_0(0) = 1$ et que $\lim_{z\to 0^+} K_0(z) = \infty$. Donc nous aurions que $F(r) = AI_0(pr) + BK_0(pr)$ pour tout $r \in [0, R]$. Comme nous voulons que F soit bornée comme fonction de r, alors $B = 0$ sinon, à cause de $\lim_{z\to 0^+} K_0(z) = \infty$, nous aurions une contradiction. Ainsi $F(r) = AI_0(pr)$. Comme $I_0(z) \neq 0$ si $z \geq 0$ et parce que $F(R) = 0$, nous obtenons alors que $AI_0(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 0$. Donc $F \equiv 0$. Mais ceci est impossible si nous voulons que la solution u ne soit pas triviale. Nous devons exclure ce cas.

Nous avons tracé à la figure [5] le graphe de $I_0(z)$ et $K_0(z)$ pour $z \in [0, 3]$.

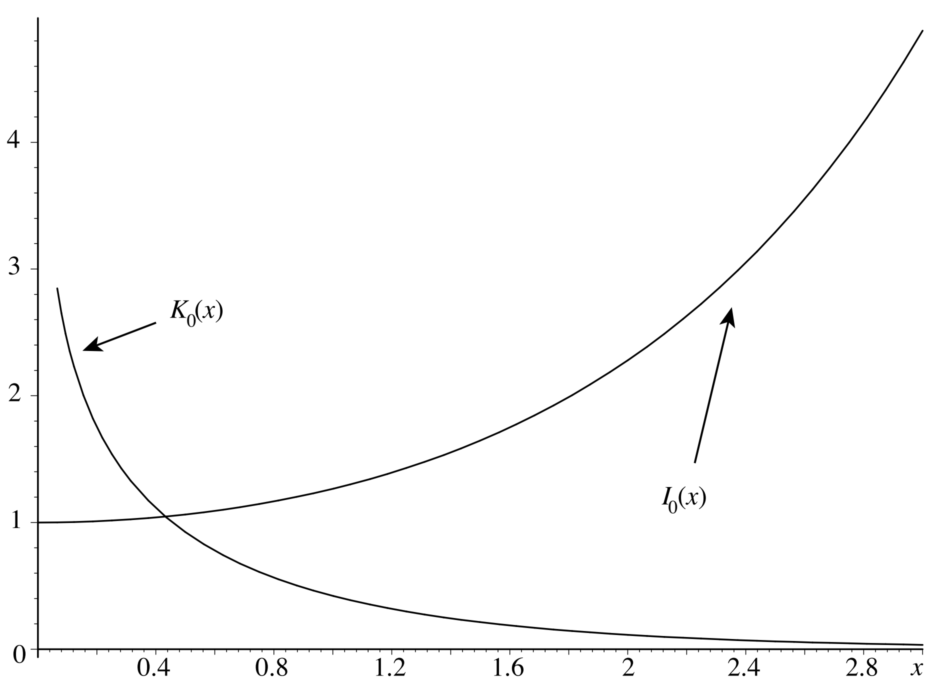

Figure [5]

* * *

Exercice 9.1

Développer les fonctions suivantes $f(x)$ sur l'intervalle $[0, R]$ où $R > 0$ en série de Fourier-Bessel de la forme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0\left(\frac{\alpha_n x}{R}\right)$$

où J_0 est la fonction de Bessel du premier type de paramètre $\nu = 0$ et α_n est la n ième racine positive de $J_0(x)$ en sachant que $(x^\nu J_\nu(x))' = x^\nu J_{\nu-1}(x)$.

a) $f(x) = 1$ pour tout x et $R > 0$ est quelconque.

b) $f(x) = 1 - x^2$ et $R = 1$.

c) $f(x) = 1 - x^4$ et $R = 1$.

Exercice 9.2 (†)

Rappelons que l'équation d'onde en coordonnées polaires est

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \quad \text{où } u = u(r, \theta, t). \qquad \text{(éq. [2])}$$

Nous allons résoudre le problème de l'équation d'onde pour une membrane circulaire de rayon R en ne supposant pas que u soit indépendant de θ.

a) En utilisant la substitution $u(r, \theta, t) = F(r, \theta)G(t)$ dans l'équation [2], montrer que nous obtenons les deux équations

$$\frac{d^2 G}{dt^2} + (ck)^2 G = 0 \qquad \text{(éq. [3])}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + k^2 F = 0 \qquad \text{(éq. [4])}$$

où k est une constante.

b) En utilisant la substitution $F(r, \theta) = H(r)L(\theta)$ dans l'équation [4], montrer que nous obtenons les deux équations

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} + n^2 L = 0 \qquad \text{(éq. [5])}$$

$$r^2\frac{d^2 H}{dr^2} + r\frac{dH}{dr} + ((kr)^2 - n^2)H = 0 \qquad \text{(éq. [6])}$$

où n est une constante.

c) Montrer que

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u_{m,n}(r, \theta, t) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} u^*_{m,n}(r, \theta, t)$$

est une solution de l'équation [2] qui satisfait la condition $u(R, \theta, t) = 0$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ et $t \geq 0$, où

$$u_{m,n}(r, \theta, t) = \left[A_{m,n}\cos\left(\frac{c\alpha_{m,n}t}{R}\right) + B_{m,n}\sin\left(\frac{c\alpha_{m,n}t}{R}\right)\right] J_n\left(\frac{\alpha_{m,n}r}{R}\right)\cos(n\theta) \quad \text{et}$$
$$u^*_{m,n}(r, \theta, t) = \left[A^*_{m,n}\cos\left(\frac{c\alpha_{m,n}t}{R}\right) + B^*_{m,n}\sin\left(\frac{c\alpha_{m,n}t}{R}\right)\right] J_n\left(\frac{\alpha_{m,n}r}{R}\right)\sin(n\theta).$$

Ici $J_n(z)$ désigne la fonction de Bessel du premier type d'ordre n, $\alpha_{m,n}$ est la m ième racine positive de $J_n(z)$.

Exercice 9.3
Montrer que

$$\exp\left(\frac{z}{2}(t-t^{-1})\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z) \qquad (\spadesuit)$$

en utilisant le fait que

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Exercice 9.4
Montrer que

$$e^{iz\sin(\theta)} = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z)\cos(2n\theta) + 2i\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z)\sin((2n-1)\theta) \qquad (\heartsuit)$$

$$\cos(z\sin(\theta)) = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(z)\cos(2n\theta)$$

$$\sin(z\sin(\theta)) = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(z)\sin((2n-1)\theta)$$

en posant $t = e^{i\theta}$ dans ($\spadesuit$), où $i = \sqrt{-1}$.

Exercice 9.5
Montrer que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(n\theta - z\sin(\theta))\,d\theta = J_n(z)$$

en utilisant # 2 et l'orthogonalité des fonctions trigonométriques.

Exercice 9.6
Montrer que

$$e^{iz\cos(\theta)} = J_0(z) - 2\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}J_{2n}(z)\cos(2n\theta)\right) + 2i\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}J_{2n-1}(z)\cos((2n-1)\theta)\right)$$

$$\cos(z\cos(\theta)) = J_0(z) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}J_{2n}(z)\cos(2n\theta)$$

$$\sin(z\cos(\theta)) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}J_{2n-1}(z)\cos((2n-1)\theta)$$

Exercice 9.7
Montrer que

$$\frac{d}{dx}\Big(J_0(x)\Big) = -J_1(x) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx}\Big(x^\nu J_\nu(x)\Big) = x^\nu J_{\nu-1}(x) \quad \text{pour tout } \nu \in \mathbf{R}.$$

Exercice 9.8
Posons

$$I_{a,b} = \int_0^\alpha \left[1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2\right]^a x^b \, J_{b-1}(x) \, dx$$

où $\alpha \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$, $a, b \in \mathbf{N}$, $b > 0$.

(a) Si $a \geq 1$, alors montrer que

$$I_{a,b} = \left(\frac{2a}{\alpha^2}\right) I_{a-1,b+1}.$$

(b) Montrer que $I_{0,b} = \alpha^b J_b(\alpha)$.

(c) Montrer que $I_{a,b} = 2^a (a!) \, \alpha^{b-a} \, J_{a+b}(\alpha)$.

Exercice 9.9
Déterminer la solution $u = u(r,t)$ du problème

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right] \quad \text{avec } 0 \leq r \leq R,\ 0 \leq t$$

et tel que $u(R,t) = 0$ pour tout $t \geq 0$,

$$u(r,0) = \tilde{f}(r) = \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^p \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r,0) = \tilde{g}(r) = 0 \quad \text{pour tout } 0 \leq r \leq R.$$

Ici $p \in \mathbf{N}$, $p > 0$.