

REPRÉSENTATIONS DES GROUPE COMPACTS

Nous allons premièrement rappeler ce qu'est un groupe topologique, ainsi que ce qu'est la mesure de Haar pour les groupes localement compacts. Nous considérerons ensuite les groupes compacts et le cas particulier du groupe spécial unitaire $SU(n)$.

Définition 9.1 Un groupe G muni d'une structure d'espace topologique est dit être un **groupe topologique** si et seulement si les fonctions

$$G \times G \rightarrow G, \quad \text{définie par } (x, y) \mapsto xy, \quad \text{et} \quad G \rightarrow G, \quad \text{définie par } x \mapsto x^{-1},$$

sont continues, où la topologie sur $G \times G$ est celle de la topologie produit. Nous dirons qu'un groupe topologique G est **compact** si et seulement si G est compact comme espace topologique et qu'un groupe topologique G est **localement compact** si et seulement si tout $g \in G$ a un voisinage compact.

Nous allons maintenant présenter quelques exemples de groupes localement compacts. Tous ces groupes seront des sous-ensembles de \mathbf{R}^N pour un $N \in \mathbf{N}$ avec la topologie induite par la métrique usuelle, à savoir si $x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_N)$, alors la distance $d(x, y)$ est

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - y_i)^2}$$

et G sera muni de la topologie comme sous-espace de \mathbf{R}^N . Noter qu'avec cette topologie un sous-ensemble X de \mathbf{R}^N est compact si et seulement si X est un fermé borné par le théorème de Heine-Borel. De plus tous les espaces et groupes topologiques seront Hausdorff.

Exemple 9.2 Le **groupe additif** $(\mathbf{R}^n, +)$ des nombres réels est un groupe topologique localement compact. \mathbf{R}^n n'est pas compact, parce que \mathbf{R}^n n'est pas borné.

Exemple 9.3 Le **groupe linéaire** $GL_n(\mathbf{R}) = \{M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbf{R}) \mid \det(M) \neq 0\}$ des matrices carrées inversibles d'ordre $n \times n$ avec le produit de matrices est un groupe topologique localement compact. Ici $GL_n(\mathbf{R})$ est un ouvert de $\mathbf{R}^{n \times n}$, parce que la fonction $M \mapsto \det(M)$ est continue et que $GL_n(\mathbf{R})$ est l'image inverse d'un ouvert de \mathbf{R} . La topologie sur $GL_n(\mathbf{R})$ est alors celle de sous-espace de $\mathbf{R}^{n \times n}$. En effet, le produit de matrices est donné par des fonctions polynômiales et prendre l'inverse est donné par des fonctions rationnelles en utilisant la matrice adjointe et dans ces deux cas, ces fonctions sont continues. Ceci montre que $GL_n(\mathbf{R})$ est un groupe topologique. Il est évident que $GL_n(\mathbf{R})$ est localement compact. Cependant $GL_n(\mathbf{R})$ n'est pas compact. En effet,

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbf{R}) \quad \text{pour tout } a \in \mathbf{R}^\times$$

montre que $GL_n(\mathbf{R})$ n'est pas borné.

Exemple 9.4 Le **groupe spécial unitaire** $SU(n) = \{M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbf{C}) \mid {}^t \overline{M} M = I_n \text{ et } \det(M) = 1\}$ avec le produit de matrices est un groupe topologique. Ici et dans ce qui suivra, I_n désigne la matrice identité. De plus ce groupe est compact. En effet, si nous traduisons les deux conditions ${}^t \overline{M} M = I_n$ et $\det(M) = 1$ en terme d'équations sur les entrées de la matrice M , nous obtenons que $SU(n)$ est un sous-ensemble borné fermé de $\mathbf{R}^{2n \times 2n}$. Si nous laissons tomber la condition sur le déterminant, nous obtenons aussi un groupe topologique compact: le **groupe unitaire** $U(n) = \{M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbf{C}) \mid {}^t \overline{M} M = I_n\}$.

Exemple 9.5 Avec le produit de matrices, alors le **groupe spécial orthogonal** $SO_n(\mathbf{R}) = \{M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbf{R}) \mid {}^t M M = I_n \text{ et } \det(M) = 1\}$ est un groupe topologique compact. En effet, si nous traduisons

les deux conditions ${}^tMM = I_n$ et $\det(M) = 1$ en terme d'équations sur les entrées de la matrice M , nous obtenons que $SO_n(\mathbf{R})$ est un sous-ensemble borné fermé de $\mathbf{R}^{n \times n}$. Si nous laissons tomber la condition sur le déterminant, nous obtenons aussi un groupe topologique compact: le **groupe orthogonal** $O_n(\mathbf{R}) = \{M \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbf{R}) \mid {}^tMM = I_n\}$.

Exemple 9.6 Soit G est un groupe fini. Alors nous obtenons que G est un groupe topologique compact avec la topologie discrète.

Pour la suite de ce chapitre, G désignera un groupe topologique Hausdorff localement compact. Nous allons maintenant décrire ce qu'est une mesure de Haar pour un tel groupe. Ensuite nous illustrerons par des exemples cette notion.

Notation 9.7 Soit un espace topologique Hausdorff localement compact E . Nous désignerons par $L(E)$: l'ensemble des fonctions $f : E \rightarrow \mathbf{C}$ continues sur E à valeurs complexes, nulles en dehors d'un ensemble compact; par $L_+(E)$: l'ensemble des fonctions $f : E \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}$ continues sur E à valeurs dans $\mathbf{R}_{\geq 0}$, nulles en dehors d'un ensemble compact.

Définition 9.8 Avec les notations de 9.7, une **mesure de Radon** μ est une fonctionnelle linéaire sur $L(E)$ telle que $\mu(f) \geq 0$ pour tout $f \in L_+(E)$. Nous noterons alors $\mu(f)$ par $\int_E f(x) d\mu(x)$.

Définition 9.9 Une mesure de Radon non nulle sur G est dite être une mesure de Haar si et seulement si elle est invariante à gauche, i.e.

$$\int_G f(x) d\mu(x) = \int_G f(g^{-1}x) d\mu(x) = \int_G f(x) d\mu(gx).$$

Symboliquement nous écrivons $d\mu(gx) = d\mu(x)$.

Théorème 9.10 (Haar - Weil) *Pour tout groupe topologique Hausdorff localement compact, il existe une mesure de Haar et, à un facteur constant près, une seule. Ce facteur appartient à $\mathbf{R}_{>0} = \{x \in \mathbf{R} \mid x > 0\}$.*

Preuve: Voir A.Weil, L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Hermann, Paris 1965, deuxième édition, chapitre II, §7.

Exemple 9.11 Pour le groupe additif $(\mathbf{R}^n, +)$, l'intégrale de Lebesgue

$$\mu(f) = \int \cdots \int_{\mathbf{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

est la mesure de Haar. Cette intégrale existe car $f \in L(\mathbf{R}^n)$. Il est facile de vérifier que ceci est une mesure de Radon non nulle. Nous obtenons l'invariance à gauche en considérant le jacobien du changement de coordonnées.

Exemple 9.12 Pour le groupe linéaire $GL_n(\mathbf{R})$, la mesure de Haar est de la forme

$$d\mu(X) = \frac{1}{|\det(X)|^n} dX \quad \text{où } X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{et } dX = \prod_{i,j=1}^n dx_{ij}.$$

Ici $GL_N(\mathbf{R})$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbf{R}^{n \times n}$ et dX est la restriction à $GL_N(\mathbf{R})$ de la mesure de Lebesgue de $\mathbf{R}^{n \times n}$. Il est clair que μ est une mesure de Radon non nulle. Il suffit de vérifier que μ est invariante à gauche. Pour $M \in GL_n(\mathbf{R})$, nous avons

$$(1) \quad \int_{GL_n(\mathbf{R})} f(M^{-1}X) d\mu(X) = \int_{GL_n(\mathbf{R})} f(M^{-1}X) \frac{1}{|\det(X)|^n} dX = \int_{GL_n(\mathbf{R})} f(Y) \frac{|\det(M)|^n}{|\det(MY)|^n} dY,$$

en considérant les nouvelles coordonnées

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{pmatrix} = M^{-1}X \quad \text{et} \quad dY = \prod_{i,j=1}^n dy_{ij}.$$

Alors la matrice jacobienne de ce changement de coordonnées est

$$\begin{pmatrix} M & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M & \cdots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M \end{pmatrix}$$

et nous obtenons ainsi l'équation (1). Après simplification, l'équation (1) devient

$$\int_{GL_n(\mathbf{R})} f(M^{-1}X) \frac{1}{|\det(X)|^n} dX = \int_{GL_n(\mathbf{R})} f(Y) \frac{1}{|\det(Y)|^n} dY = \int_{GL_n(\mathbf{R})} f(X) \frac{1}{|\det(X)|^n} dX.$$

Exemple 9.13 Pour le groupe spécial orthogonal $SO_n(\mathbf{R})$, nous pouvons premièrement noter que la fonction continue

$$[0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow SO_3(\mathbf{R}) \quad \text{définie par } (\theta, \phi, \theta') \mapsto g(\theta, \phi, \theta') = R_z(\theta) R_x(\phi) R_z(\theta')$$

est surjective et est un homéomorphisme à l'intérieur de $[0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, i.e pour les points de $]0, 2\pi[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$, où

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, R_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad R_z(\theta') = \begin{pmatrix} \cos(\theta') & -\sin(\theta') & 0 \\ \sin(\theta') & \cos(\theta') & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont des rotations ayant respectivement pour axes: l'axe des z , l'axe des x et l'axe des z .

En effet, considérons une matrice $M \in SO_3(\mathbf{R})$, i.e.

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Comme vecteur (colonne) de \mathbf{R}^3 , nous pouvons utiliser des coordonnées similaires aux coordonnées sphériques pour décrire la dernière colonne de M , nous obtenons ainsi

$$\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \sin(\phi) \\ -\cos(\theta) \sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix} \quad \text{avec } 0 \leq \phi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

De même, comme vecteur (ligne) de \mathbf{R}^3 , nous pouvons utiliser des coordonnées similaires aux coordonnées sphériques pour décrire la dernière ligne de M , nous obtenons ainsi

$$(a_{31}, a_{32}, a_{33}) = (\sin(\theta') \sin(\phi'), \cos(\theta') \sin(\phi'), \cos(\phi'))$$

Nous pouvons noter premièrement que $\phi' = \phi$, car si $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel de \mathbf{R}^3 (où les vecteurs sont en colonne), alors

$$\begin{aligned} \cos(\phi) &= \langle {}^t(0, 0, 1), M {}^t(0, 0, 1) \rangle = \langle M^{-1} {}^t(0, 0, 1), {}^t(0, 0, 1) \rangle = \langle {}^t M {}^t(0, 0, 1), {}^t(0, 0, 1) \rangle \\ &= \langle {}^t((0, 0, 1)M), {}^t(0, 0, 1) \rangle = \cos(\phi') \end{aligned}$$

et comme $0 \leq \phi, \phi' \leq \pi$, nous obtenons l'égalité.

De plus si nous considérons le produit $R_z(-\theta)MR_z(-\theta')$, nous obtenons la matrice suivante

$$R_z(-\theta)MR_z(-\theta') = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}.$$

Maintenant si $0 < \phi < \pi$, alors $\sin(\phi) \neq 0$. De ceci et du fait que $R_z(-\theta)MR_z(-\theta')$ est orthogonale, nous obtenons facilement que $b_{12} = 0$, $b_{11} = \pm 1$, $b_{21} = 0$, $b_{22} = \cos(\phi)$ et de cette dernière équation et parce que $\det(R_z(-\theta)MR_z(-\theta')) = 1$, nous obtenons que $b_{11} = 1$. En d'autres mots, si $0 < \phi < \pi$, alors $M = g(\theta, \phi, \theta')$ avec θ , ϕ et θ' comme ci-dessus.

Par contre si $\phi = 0, \pi$, alors $\sin(\phi) = 0$. La matrice

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in O_2(\mathbf{R}).$$

Plus précisément, si $\phi = 0$, (resp. si $\phi = \pi$), alors

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbf{R}) \quad (\text{resp.} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ -b_{21} & -b_{22} \end{pmatrix} \in SO_2(\mathbf{R})).$$

Donc si $\phi = 0$, alors

$$R_z(-\theta)MR_z(-\theta') = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & -\sin(\phi) \\ 0 & \sin(\phi) & 1 \end{pmatrix} = R_z(\theta'') \text{ pour un certain } \theta'',$$

et si $\phi = \pi$, alors

$$R_z(-\theta)MR_z(-\theta') = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 \\ -b_{21} & -b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = R_z(\theta'')R_x(\pi)$$

pour un certain θ'' . De tout ceci nous pouvons conclure que la fonction $(\theta, \phi, \theta') \mapsto g(\theta, \phi, \theta')$ est surjective et est un homéomorphisme à l'intérieur de $[0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, i.e pour les points de $]0, 2\pi[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[$.

Nous avons ainsi une paramétrisation de $SO_3(\mathbf{R})$. En terme de cette dernière, la mesure de Haar est $d\mu(g) = \sin(\phi) d\theta d\phi d\theta'$, i.e.

$$\mu(f) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(g(\theta, \phi, \theta')) \sin(\phi) d\theta d\theta' d\phi.$$

Il n'est pas difficile de vérifier qu'il s'agit bien d'une mesure de Radon non nulle. Pour conclure que c'est une mesure de Haar, il faut vérifier l'invariance à gauche. Fixons $0 \leq \theta_0 \leq 2\pi$, $0 \leq \phi_0 \leq \pi$ et $0 \leq \theta'_0 \leq 2\pi$. Il nous faut donc vérifier que

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f((g(\theta_0, \phi_0, \theta'_0))^{-1} g(\theta, \phi, \theta')) \sin(\phi) d\theta d\theta' d\phi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(g(\theta, \phi, \theta')) \sin(\phi) d\theta d\theta' d\phi.$$

Pour ceci, il nous faut considérer les nouvelles coordonnées $\theta_1, \phi_1, \theta'_1$ définies par

$$(g(\theta_0, \phi_0, \theta'_0))^{-1} g(\theta, \phi, \theta') = g(\theta_1, \phi_1, \theta'_1)$$

où $0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$, $0 \leq \phi_1 \leq \pi$ et $0 \leq \theta'_1 \leq 2\pi$ et calculer le jacobien

$$\frac{\partial(\theta_1, \phi_1, \theta'_1)}{\partial(\theta, \phi, \theta')}.$$

Nous laissons au lecteur le soin de faire ce calcul. Nous obtenons que la mesure ainsi définie est une mesure de Haar.

Remarque 9.14 Une mesure de Haar sur G n'est pas nécessairement invariante à droite. Si μ est une mesure de Haar sur G , alors nous pouvons considérer pour tout $g \in G$ une nouvelle mesure

$$f \mapsto \mu_g(f) = \int_G f(xg) d\mu(x) \quad \text{pour tout } f \in L(G).$$

Il est facile de vérifier que nous obtenons ainsi une nouvelle mesure de Haar. Donc celle-ci diffère de μ par un facteur appartenant à $\mathbf{R}_{>0}$. Nous noterons ce facteur par $\Delta(g)$. Donc

$$\int_G f(xg) d\mu(x) = \Delta(g) \int_G f(x) d\mu(x) \quad \text{pour tout } f \in L(G) \quad \text{et tout } g \in G.$$

Il est facile de voir que Δ ne dépend pas du choix de la mesure de Haar de G , $\Delta(gg') = \Delta(g)\Delta(g')$ pour tout $g, g' \in G$. De plus, $\Delta : G \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ est une fonction continue. Cette dernière propriété est une conséquence du fait que pour tout $f \in L(G)$, f est uniformément continue.

Pour la suite de ce chapitre, μ désignera une mesure de Haar sur G .

Définition 9.15 $\Delta : G \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$ est la **fonction modulaire** de G . Nous dirons que G est **unimodulaire** si et seulement si $\Delta(g) = 1$ pour tout $g \in G$.

Corollaire 9.16 Soit un groupe G compact. Alors G est unimodulaire et toute mesure de Haar de G est invariante à droite.

Preuve: Parce que Δ est un homomorphisme continue de G vers le groupe multiplicatif $\mathbf{R}_{>0}$, alors l'image $\Delta(G)$ de Δ est un sous-groupe compact de $\mathbf{R}_{>0}$. Mais $\mathbf{R}_{>0}$ a un seul sous-groupe compact: le sous-groupe trivial $\{1\}$. En effet, s'il existe un nombre réel $x \in \Delta(G)$ et $x \neq 1$, alors en considérant soit x ou encore x^{-1} , nous pouvons supposer que $x > 1$. Mais $(x^n)_{n \geq 1}$ est une suite non bornée et ceci contredit la compacité de $\Delta(G)$. Donc $\Delta(G) = \{1\}$ et G est unimodulaire. Le fait que toute mesure de Haar de G est invariante à droite est une conséquence de l'unimodularité. Ceci termine la preuve.

Rappel 9.17 Un **espace de Hilbert** \mathcal{H} complexe est un espace vectoriel complexe munie d'une forme hermitienne positive définie $(\cdot, \cdot) : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbf{C}$ (i.e. que nous avons $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$, $(\alpha x, y) = \alpha(x, y)$, $(x, y) = \overline{(y, x)}$, $(x, x) \geq 0$ avec $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ pour tout $x, x_1, x_2, y \in \mathcal{H}$ et tout $\alpha \in \mathbf{C}$), telle que \mathcal{H} est complet par rapport à la distance $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x - y, x - y)}$ pour tout $x, y \in \mathcal{H}$, i.e. toute suite de Cauchy dans \mathcal{H} a une limite dans \mathcal{H} .

Un **opérateur linéaire unitaire** de \mathcal{H} est une transformation linéaire $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ inversible telle que $(Tx, Ty) = (x, y)$ pour tout $x, y \in \mathcal{H}$.

Exemple 9.18 $\mathcal{H} = \mathbf{C}^n$ avec la forme hermitienne $(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ est un espace de Hilbert. Ici \bar{z} est le conjugué du nombre complexe z .

Exemple 9.19 $L^2(\mathbf{R}^n) = \{f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{C} \mid \int_{\mathbf{R}^n} |f(x_1, x_2, \dots, x_n)|^2 dx_1 dx_2 \cdots dx_n < \infty\}$ est un espace de Hilbert avec la forme hermitienne $(f, g) = \int_{\mathbf{R}^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \overline{g(x_1, x_2, \dots, x_n)} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$ pour tout $f, g \in L^2(\mathbf{R}^n)$.

Ce dernier exemple peut être généralisé à tout groupe localement compact.

Exemple 9.20 Soit un groupe topologique Hausdorff localement compact G et une mesure de Haar sur G . Alors $L^2(G) = \{f : G \rightarrow \mathbf{C} \mid \int_G |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty\}$ est un espace de Hilbert avec la forme hermitienne $(f, g) = \int_G f(x) \overline{g(x)} d\mu(x)$ pour tout $f, g \in L^2(G)$.

Définition 9.21 Une transformation linéaire $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ d'un espace de Hilbert \mathcal{H} est dite **bornée** si et seulement s'il existe une constante c telle que $\|T(x)\| \leq c\|x\|$ pour tout $x \in \mathcal{H}$.

Définition 9.22 Une **représentation unitaire** de G sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} est un homomorphisme $R : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ de G dans le groupe $U(\mathcal{H})$ des opérateurs linéaires unitaires bornés d'un espace de Hilbert

\mathcal{H} complexe dont les inverses sont aussi bornés tel que la fonction $G \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ définie par $(g, x) \mapsto R(g)x$ est continue.

Remarque 9.23 Nous obtenons la continuité de la fonction $G \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ définie par $(g, x) \mapsto R(g)x$ en exigeant que la fonction $G \rightarrow \mathcal{H}$, définie par $g \mapsto R(g)x$ soit continue à $g = e$ pour tout $x \in \mathcal{H}$ et qu'une borne uniforme pour $\|R(g)\|$ dans un voisinage de e existe. Nous obtenons ceci en notant

$$\begin{aligned} \|R(g)x - R(g_0)x_0\| &\leq \|R(g_0)\| \|R(g_0^{-1}g)x - x_0\| \leq \|R(g_0)\| \|R(g_0^{-1}g)(x - x_0)\| + \|R(g_0)\| \|R(g_0^{-1}g)x_0 - x_0\| \\ &\leq \|R(g_0)\| \|R(g_0^{-1}g)\| \|(x - x_0)\| + \|R(g_0)\| \|R(g_0^{-1}g)x_0 - x_0\|. \end{aligned}$$

Sous nos hypothèses, les deux termes dans la dernière expression sont petits si $g \rightarrow g_0$ et $x \rightarrow x_0$.

Définition 9.24 Une représentation unitaire $R : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ de G sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} est dite **irréductible** (topologiquement) si les seuls sous-espaces fermés invariants par rapport à R sont $\{0\}$ et \mathcal{H} .

Définition 9.25 Deux représentations unitaires $R : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ et $R' : G \rightarrow U(\mathcal{H}')$ sont dites **équivalentes** si et seulement s'il existe une transformation linéaire unitaire bornée $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ ayant un inverse borné telle que $TR(g) = R'(g)T$ pour tout $g \in G$. Nous noterons ceci par $R \cong R'$.

Proposition 9.26 (Lemme de Schur) Une représentation unitaire $R : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ de G sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} est irréductible si et seulement si les seules transformations linéaires bornées $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ telles que $R(g)T = TR(g)$ pour tout $g \in G$ sont les multiples de l'identité $T = \alpha Id_{\mathcal{H}}$.

Preuve: Supposons que R est réductible et que U est un sous-espace fermé de \mathcal{H} invariant par rapport à R différent de $\{0\}$ et \mathcal{H} . Considérons la projection orthogonale $\pi_U : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ de \mathcal{H} sur U . Alors π_U est une transformation linéaire bornée non scalaire qui commute avec $R(g)$ pour tout $g \in G$.

Réciproquement supposons que $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ est une transformation linéaire bornée non scalaire qui commute avec $R(g)$ pour tout $g \in G$. Notons par T^* : son adjoint. Rappelons que T^* est la transformation linéaire définie par la formule: $(Tx, y) = (x, T^*y)$ pour tout $x, y \in \mathcal{H}$. Il n'est pas difficile de vérifier que T^* est une transformation linéaire bornée non scalaire. T^* commute avec $R(g)$ pour tout $g \in G$ parce que R est unitaire.

Soient les transformations linéaires auto-adjointes

$$A = \frac{T + T^*}{2} \quad \text{et} \quad B = \frac{T - T^*}{2i}.$$

Ceux-ci commutent avec les $R(g)$ pour tout $g \in G$. Comme $T = A + iB$, au moins une des transformations linéaires A, B n'est pas scalaire. Disons A . L'argument est similaire dans le cas de B . Le théorème spectral pour les transformations linéaires auto-adjointes appliqué à A entraîne qu'il existe une projection orthogonale non scalaire π , celle-ci est fonction de A et de plus nous obtenons que π commute avec $R(g)$ pour tout $g \in G$. En considérant l'image de π , nous obtenons une sous-espace fermé invariant par R différent de $\{0\}$ et \mathcal{H} et ainsi que R est réductible.

Pour le reste de ce chapitre, G sera un groupe topologique Hausdorff compact et μ sera la mesure de Haar sur G telle que $\int_G d\mu(x) = 1$.

Lemme 9.27 Soient une représentation unitaire $R : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ de G sur l'espace de Hilbert \mathcal{H} et $u \in \mathcal{H}$. Alors la transformation linéaire

$$K_u : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, \quad \text{définie par } v \mapsto \int_G (v, R(x)u) R(x)u d\mu(x)$$

est bornée et commute avec $R(g)$ pour tout $g \in G$.

Preuve: Montrons premièrement que K_u est bornée. Nous avons

$$\begin{aligned} \|K_u(v)\| &= \left\| \int_G (v, R(x)u) R(x)u d\mu(x) \right\| \leq \int_G |(v, R(x)u)| \|R(x)u\| d\mu(x) \\ &\leq \int_G \|v\| \|R(x)u\| \|u\| d\mu(x), \end{aligned}$$

parce que $R(x)$ est unitaire et que $|(v, R(x)u)| \leq \|v\| \|R(x)u\|$. Conséquentment

$$\|K_u(v)\| \leq \|u\|^2 \|v\| \int_G d\mu(x) = \|u\|^2 \|v\|$$

et K_u est borné.

Nous avons

$$\begin{aligned} R(g)K_u(v) &= R(g) \int_G (v, R(x)u) R(x)u d\mu(x) = \int_G (v, R(x)u) R(g)R(x)u d\mu(x) \\ &= \int_G (v, R(x)u) R(gx)u d\mu(x) = \int_G (v, R(g^{-1}x)u) R(x)u d\mu(g^{-1}x) \\ &= \int_G (R(g)v, R(x)u) R(x)u d\mu(x) = K_u(R(g)v), \end{aligned}$$

parce que μ est invariante à gauche et $R(g)$ est unitaire. Donc $K_u R(g) = R(g) K_u$ pour tout $g \in G$.

Théorème 9.28 *Toute représentation $R : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ unitaire irréductible de G est de dimension finie.*

Preuve: Par le lemme précédent, nous avons $K_u R(g) = R(g) K_u$ pour tout $g \in G$ et tout $u \in \mathcal{H}$. Par le lemme de Schur, nous avons que $K_u = \alpha(u) Id_{\mathcal{H}}$, où $\alpha(u) \in \mathbf{C}$. Conséquentment

$$(K_u(v), v) = \int_G (v, R(x)u) (R(x)u, v) d\mu(x) = \int_G |(R(x)u, v)|^2 d\mu(x) = \alpha(u) \|v\|^2.$$

En interchangeant u et v , nous aurons

$$(*) \left\{ \begin{aligned} \alpha(v) \|u\|^2 &= \int_G |(R(x)v, u)|^2 d\mu(x) = \int_G |(u, R(x)v)|^2 d\mu(x) = \int_G |(R(x^{-1})u, v)|^2 d\mu(x) \\ &= \int_G |(R(x)u, v)|^2 d\mu(x) = \alpha(u) \|v\|^2 \end{aligned} \right.$$

Nous avons utilisé ci-dessus le fait que $\int_G f(x^{-1}) d\mu(x) = \int_G f(x) d\mu(x)$. En effet, $f \mapsto \int_G f(x^{-1}) d\mu(x)$ est une mesure de Haar parce que

$$\int_G f((g^{-1}x)^{-1}) d\mu(x) = \int_G f(x^{-1}g) d\mu(x) = \int_G f(x^{-1}) d\mu(gx) = \int_G f(x^{-1}) d\mu(x).$$

Donc $\int_G f(x^{-1}) d\mu(x) = c \int_G f(x) d\mu(x)$ et, en prenant la fonction constante $f(x) = 1$ pour tout $x \in G$, nous obtenons que $c = 1$.

Nous avons $\alpha(v) \|u\|^2 = \alpha(u) \|v\|^2$ pour tout $u, v \in \mathcal{H}$. Fixons $v \in \mathcal{H}$ telle que $\|v\| = 1$. Alors nous aurons $\alpha(u) = \alpha(v) \|u\|^2$, i.e. $\alpha(u) = c' \|u\|^2$, où $c' = \alpha(v) \in \mathbf{C}$. En prenant $u = v$ dans (*), nous obtenons

$$\int_G |(R(x)u, u)|^2 d\mu(x) = c' \|u\|^2 \|v\|^2 = c' > 0$$

car la fonction $x \rightarrow |(R(x)u, u)|^2$ de G vers $\mathbf{R}_{\geq 0}$ est continue et que sa valeur à $x = e$ est $\|u\|^2 > 0$.

Soit un ensemble $\{u_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ de vecteurs orthogonaux de \mathcal{H} . Alors en considérant $u = u_k$ et $v = u_1$ dans (*), nous obtenons

$$\int_G |(R(x)u_k, u_1)|^2 d\mu(x) = \alpha(u_k) \|u_1\|^2 = c'.$$

Parce que $R(x)$ est une transformation linéaire unitaire inversible, alors $\{R(x)u_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ sera un ensemble de vecteurs orthonormaux. Alors

$$u_1 = \left[\sum_{k=1}^n (R(x)u_k, u_1) R(x)u_k \right] + u'$$

où u' est perpendiculaire à $R(x)u_i$ pour $1 \leq i \leq n$. Alors

$$1 = \|u_1\| = \left\| \left[\sum_{k=1}^n (R(x)u_k, u_1) R(x)u_k \right] + u' \right\| \geq \sum_{k=1}^n |(R(x)u_k, u_1)|^2.$$

En intégrant sur le groupe G , alors

$$nc' = \sum_{k=1}^n \int_G |(R(x)u_k, u_1)|^2 d\mu(x) = \int_G \sum_{k=1}^n |(R(x)u_k, u_1)|^2 d\mu(x) \leq \int_G d\mu(x) = 1.$$

Donc $n \leq (1/c')$ et $\dim_{\mathbf{C}}(\mathcal{H}) < \infty$. Sinon n ne serait pas borné. Le théorème est ainsi démontré.

Nous pouvons donner une autre version du lemme de Schur adaptée aux représentations des groupes compacts.

Lemme 9.29 (Schur) *Soient deux représentations irréductibles $R : G \rightarrow U(\mathcal{H})$ et $R' : G \rightarrow U(\mathcal{H}')$ du groupe compact G sur les espaces de Hilbert \mathcal{H} et \mathcal{H}' respectivement, (i.e. $\dim(\mathcal{H}) < \infty$ et $\dim(\mathcal{H}') < \infty$). Si $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}'$ est une transformation linéaire telle que $R'(g)T = TR(g)$ pour tout $g \in G$, alors soit T est un isomorphisme ou soit $T = 0$. Si $R = R'$, alors $T = \lambda Id_{\mathcal{H}}$, où $\lambda \in \mathbf{C}$.*

Preuve: Il s'agit de reprendre la preuve du lemme de Schur pour les groupes finis, i.e. du lemme 2.2. Nous obtenons que $\ker(T)$ et $\text{Image}(T)$ sont des sous-espaces fermés invariants de \mathcal{H} et \mathcal{H}' respectivement. Comme R et R' sont irréductibles, alors $\ker(T) = \{0\}$ ou \mathcal{H} et $\text{Image}(T) = \{0\}$ ou \mathcal{H}' . Nous terminons comme dans la preuve pour le cas des groupes finis.

Les coefficients matricielles des représentations irréductibles unitaires d'un groupe compact satisfont des relations d'orthogonalité.

Théorème 9.30 *Soient deux représentations $R_1 : G \rightarrow U(\mathcal{H}_1)$ et $R_2 : G \rightarrow U(\mathcal{H}_2)$ irréductibles unitaires de G , (en particulier, $\dim(\mathcal{H}_1) < \infty$ et $\dim(\mathcal{H}_2) < \infty$). Alors, pour tout $v_1, w_1 \in \mathcal{H}_1$ et $v_2, w_2 \in \mathcal{H}_2$, nous avons que*

$$\int_G (v_1, R_1(x)w_1)_1 \overline{(v_2, R_2(x)w_2)_2} d\mu(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } R_1 \not\cong R_2; \\ \frac{1}{\dim(\mathcal{H}_1)} (v_1, v_2)_1 \overline{(w_1, w_2)_1}, & \text{si } R_1 = R_2. \end{cases}$$

Ici $(\cdot, \cdot)_1$ et $(\cdot, \cdot)_2$ sont respectivement les formes hermitiennes positives définies sur \mathcal{H}_1 et \mathcal{H}_2 .

Preuve: Fixons $w_1 \in \mathcal{H}_1$ et $w_2 \in \mathcal{H}_2$. Considérons la transformation linéaire $T : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ définie par $T(v_1) = (v_1, w_1)_1 w_2$. L'intégrale suivante

$$\tilde{T} = \int_G R_2(x) T R_1(x^{-1}) d\mu(x)$$

nous donne une transformation linéaire $\tilde{T} : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$ telle que $\tilde{T}R_1(g) = R_2(g)\tilde{T}$ pour tout $g \in G$. En effet,

$$\begin{aligned} \tilde{T}R_1(g) &= \int_G R_2(x) T R_1(x^{-1}g) d\mu(x) = \int_G R_2(gx) T R_1(x^{-1}) d\mu(gx) \\ &= R_2(g) \int_G R_2(x) T R_1(x^{-1}) d\mu(x) = R_2(g)\tilde{T}. \end{aligned}$$

Si $R_1 \not\cong R_2$, alors nous avons que $\tilde{T} = 0$ par le lemme de Schur ci-dessus. Donc $(\tilde{T}v_1, v_2)_2 = 0$ pour tout $v_1 \in \mathcal{H}_1$ et $v_2 \in \mathcal{H}_2$. Mais en utilisant le fait que R_1 et R_2 sont unitaires, nous obtenons

$$\begin{aligned} \tilde{T}(v_1) &= \int_G (R_1(x^{-1})v_1, w_1)_1 R_2(x)w_2 d\mu(x) \quad \text{et} \\ (\tilde{T}(v_1), v_2)_2 &= \int_G (R_1(x^{-1})v_1, w_1)_1 (R_2(x)(w_2), v_2)_2 d\mu(x) = \int_G (v_1, R_1(x)(w_1))_1 \overline{(v_2, R_2(x)(w_2))_2} d\mu(x) = 0. \end{aligned}$$

Si $R_1 = R_2$, alors $\tilde{T} = \lambda(w_1, w_2)Id_{\mathcal{H}_1}$, où $\lambda(w_1, w_2) \in \mathbf{C}$. Donc

$$(\tilde{T}(v_1), v_2)_1 = \lambda(w_1, w_2) (v_1, v_2)_1 = \int_G (v_1, R_1(x)w_1)_1 \overline{(v_2, R_2(x)w_2)_1} d\mu(x).$$

Il nous faut donc déterminer $\lambda(w_1, w_2)$. Nous avons

$$\begin{aligned} \int_G (v_1, R_1(x)w_1)_1 \overline{(v_2, R_2(x)w_2)_1} d\mu(x) &= \int_G (R_1(x^{-1})v_1, w_1)_1 \overline{(R_2(x^{-1})v_2, w_2)_1} d\mu(x) \\ &= \int_G (w_2, R_2(x^{-1})v_2)_1 \overline{(w_1, R_2(x^{-1})v_1)_1} d\mu(x) \\ &= \int_G (w_2, R_2(x)v_2)_1 \overline{(w_1, R_2(x)v_1)_1} d\mu(x) = \lambda(v_2, v_1)(w_2, w_1)_1 \end{aligned}$$

parce que $\int_G f(x^{-1}) d\mu(x) = \int_G f(x) d\mu(x)$ pour un groupe compact, où $f \in L(G)$.

Ainsi $\lambda(w_1, w_2) (v_1, v_2)_1 = \lambda(v_2, v_1) (w_2, w_1)_1$. Donc $\lambda(w_1, w_2) = \overline{c(w_1, w_2)_1}$ si $c \in \mathbf{C}$. Nous avons ainsi montré que

$$\int_G (v_1, R_1(x)w_1)_1 \overline{(v_2, R_2(x)w_2)_1} = c (v_1, v_2)_1 \overline{(w_1, w_2)_1}.$$

Il nous faut maintenant démontrer que $c = 1/\dim(\mathcal{H}_1)$. Prenons une base orthonormale $\{e_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ de \mathcal{H}_1 et un vecteur $w \neq 0$ de \mathcal{H}_1 . Nous avons

$$\begin{aligned} cn \|w\|^2 &= \sum_{i=1}^n \int_G (e_i, R_1(x)w)_1 \overline{(e_i, R_1(x)w)_1} d\mu(x) = \int_G \sum_{i=1}^n (e_i, R_1(x)w)_1 \overline{(e_i, R_1(x)w)_1} d\mu(x) \\ &= \int_G (R_1(x)w, R_1(x)w)_1 d\mu(x) = \int_G \|w\|^2 = \|w\|^2 \int d\mu(x) = \|w\|^2. \end{aligned}$$

De ceci, nous obtenons que $cn = 1$ et $c = 1/n = 1/\dim(\mathcal{H}_1)$. Le théorème est donc démontré.