Algèbre linéaire 3 Christophe Reutenauer

Cours 1 End(V) et sous-espaces stables

V est un espace vectoriel sur le corps commutatif K.
End(V) est l'ensemble des endomorphismes de V.
Définition d'une algèbre sur K, ou K-algèbre.
End(V) est une K-algèbre.

Si V est de dimension finie n, $\mathrm{End}(V) \simeq K^{n\times n}$ en tant que K-algèbre.
De plus, End(V) est un K-espace vectoriel de dimension n^2, comme $K^{n\times n}$. Ceci découle de ce qu'un isomorphisme d'algèbres sur K est en particulier un isomorphisme d'espace vectoriels sur K.
Une base de $K^{n\times n}$ est formée par les matrices élémentaires E_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$.

Si $(u_i)_{i\in I}$ est une famille d'endomorphismes de V, et W un sous-espace de V, on dit que W est un sous-espace stable sous cette famille si : $\forall i \in I$, $\forall w \in W$, $u_i(w) \in W$.
Nous appliquerons cette définition surtout dans le cas où la famille est réduite à un élément

Cependant, mentionnons sans démonstration le célèbre théorème de Burnside : soit A une sous-algèbre de End( ), avec $K = \mathbb{C}$.
Si A n'a pas de sous-espace stable, autre

| que $\{0\}$ et V, alors $A = \mathrm{End}(V)$.
| ($\dim(V)$ est supposée finie).

Réduire un endomorphisme u, c'est trouver des sous-espaces stables sous u.
On a deux situations :

1. $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ et chaque sous-espace V_i est stable sous u.
Alors, dans une base adaptée à cette somme directe, la matrice de u a une forme diagonale par blocs.

2. $V_1 \subsetneq V_2 \subset \cdots \subset V_k = V$ et chaque sous-espace V_i est stable sous-u.
Alors, dans une base adaptée à cette <u>filtration</u>, la matrice de u a une forme triangulaire par blocs.

<u>Cas particuliers</u> $\forall i$, $\dim(V_i) = 1$
Dans le cas 1., u est dite <u>diagonalisable</u> et dans le cas 2., u est dite <u>triangulable</u>.
Nous y reviendrons.