Cours 10 Algèbre linéaire 3 Christophe Reutenauer

Dualité : transposée d'une application linéaire.

Définition Soit E, F des espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On appelle transposée de u, notée ${}^t u$, la fonction

$$\begin{aligned} F^* &\longrightarrow E^* \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ u \end{aligned}$$

NB On a donc ${}^t u(\varphi) = \varphi \circ u$.

Remarquer aussi que $\varphi \circ u$ va bien de E vers K, car u va de E vers F et φ de F vers K.

Il y a plusieurs vérifications à faire :

(i) $\varphi \circ u$ est bien une forme linéaire sur E, i.e $\varphi \circ u \in E^*$.

(ii) ${}^t u$ est linéaire.

Vérifions (i) :

Cela découle de ce que φ et u sont linéaires et que la composée de deux applications linéaires est linéaire.

Vérifions (ii) : soit $\varphi, \psi \in F^*$ et $\alpha \in K$.

Montrons que ${}^t u(\varphi + \psi) = {}^t u(\varphi) + {}^t u(\psi$

et ${}^t u(\alpha \varphi) = \alpha\, {}^t u(\varphi)$.

Pour cela, on prend e dans E et on montre que les 2 membres de chacune des égalités, évalués en e, donnent le même résultat.

$$
\begin{aligned}
{}^t u(\varphi+\psi)(e) &= (\varphi+\psi)\circ u(e) \\
&= (\varphi+\psi)(u(e)) \\
&= \varphi(u(e)) + \psi(u(e)) \\
&= \varphi\circ u(e) + \psi\circ u(e) \\
&= (\varphi\circ u + \psi\circ u)(e) \\
&= ({}^t u(\varphi) + {}^t u(\psi))(e)
\end{aligned}
$$

Donc ${}^t u(\varphi+\psi) = {}^t u(\varphi) + {}^t u(\psi)$. De plus

$$
\begin{aligned}
{}^t u(\alpha\varphi)(e) &= (\alpha\varphi)\circ u(e) = (\alpha\varphi)(u(e)) \\
&= \alpha\, \varphi(u(e)) \\
&= \alpha\, \varphi\circ u(e) = \alpha\, {}^t u(\varphi)(e) \\
&= (\alpha\, {}^t u(\varphi))(e)
\end{aligned}
$$

Donc ${}^t u(\alpha\varphi) = \alpha\, {}^t u(\varphi)$.

<u>Théorème</u> | <u>Soit</u> $u \in \mathcal{L}(E, F)$. <u>Alors</u>

$$\mathrm{Ker}({}^t u) = (\mathrm{Im}(u))^\circ$$

<u>et</u> $$\mathrm{Im}({}^t u) = (\mathrm{Ker}(u))^\circ$$

Regardons d'abord si ces égalités ont du sens. On a : : $\mathrm{Ker}({}^t u)$ sous-espace de F^*

$\mathrm{Im}(u)$ ———————— F

$\Rightarrow \mathrm{Im}(u)$ ———————— F^*. ✓

De plus : $\mathrm{Im}({}^t u)$ sous-espace de E^*

$\mathrm{Ker}(u)$ ———————— E

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(u)$ ———————— E^*. ✓

<u>Preuve</u> On a $\varphi \in \mathrm{Ker}\, {}^t(u)$

$\iff \varphi \circ u = 0$

$\iff \mathrm{Im}(u) \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$

$\iff \forall f \in \mathrm{Im}(u),\ \varphi(f) = 0$

$\iff \varphi \in \mathrm{Im}(u)^\circ$.

Pour la deuxième égalité, il suffit de montrer que $\mathrm{Im}({}^t u)^\circ = \mathrm{Ker}(u)$, d'après le cor. 9.4.

On a : $e \in \mathrm{Ker}(u) \iff u(e) = 0$

$\iff u(e) \in (F^*)^\circ$ (car $\underset{\text{cor. 16.4}}{(F^*)^\circ = \{0\}}$)

$\iff \forall \varphi \in F^*,\ \varphi(u(e)) = 0$

$\iff \forall \varphi \in F^*,\ \varphi \circ u(e) = 0$

$\iff$ ———, ${}^t u(\varphi)(e) = 0$

$\iff \forall \psi \in \mathrm{Im}({}^t u),\ \psi(e) = 0$

$\iff e \in \mathrm{Im}({}^t u)^\circ$.

$\square$

<u>Corollaire 2</u> $rg(u) = rg({}^t u)$

<u>preuve</u> On a : $\dim \mathrm{Ker}({}^t u) + \dim \mathrm{Im}({}^t u) = \dim F^*$

et : $\dim \mathrm{Im}(u) + \dim \mathrm{Im}(u)^\circ = \dim F$

Comme $\dim F = \dim F^*$, on obtient par soustraction, et le th. 1, que

$\dim \mathrm{Im}\, {}^t u - \dim \mathrm{Im}(u) = 0$,

i.e $rg(u) = rg({}^t u)$. $\square$

Corollaire 3 1) ${}^t u$ injective $\Leftrightarrow$ u surjective
2) ${}^t u$ surjective $\Leftrightarrow$ u injective

Preuve 1) ${}^t u$ injective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ker}({}^t u) = 0$
$\overset{\text{th.1}}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{Im}(u)^\circ = 0 \;\underset{\text{cor.16.4}}{\Leftrightarrow}\; \mathrm{Im}(u) = F$

2) ${}^t u$ surjective $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}({}^t u) = F \overset{\text{th.1}}{\Leftrightarrow} \mathrm{Ker}(u)^\circ = F$
$\underset{\text{cor.9.4}}{\Leftrightarrow}$ $\mathrm{Ker}(u) = 0$ $\square$

Théorème 4 Soient E, F des espaces vectoriels, avec bases respectives $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. La matrice de ${}^t u$ dans les bases duales $\mathcal{C}^*$ et $\mathcal{B}^*$ de F^*, E^* est la transposée de la matrice de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

Preuve Soit M la matrice de u dans les bases $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $\mathcal{C} = \{f_1, \dots, f_p\}$.
Soit $M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$.

On a donc $u(e_j) = \sum_{1 \leq i \leq p} m_{ij} f_i$

Posons $${}^t u(f_\ell^*) = \sum_{1 \leq k \leq n} m'_{k\ell}\, e_k^* \qquad (1)$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que $m'_{k\ell} = m_{\ell k}$.

Evaluons (1) de chaque côté en e_j (chaque côté est une forme linéaire sur E !). On a

$$
\begin{aligned}
{}^t u(f_\ell^*)(e_j) &= f_\ell^* \circ u(e_j) \\
&= f_\ell^*\Big(\sum_{1\leq i\leq p} m_{ij}\, f_i\Big) \\
&= \sum_{1\leq i\leq p} m_{ij}\, \underbrace{f_\ell^*(f_i)}_{\delta_{\ell i}} = m_{\ell j}
\end{aligned}
$$

De plus

$$
\begin{aligned}
\Big(\sum_{1\leq k\leq n} m'_{k\ell}\, e_k^*\Big)(e_j) &= \sum_{1\leq k\leq n} m'_{k\ell}\, \overbrace{e_k^*(e_j)}^{\delta_{kj}} \\
&= m'_{j\ell}
\end{aligned}
$$

Donc $m_{\ell j} = m'_{j\ell}$, cqfd. $\square$

Rappelons que nous identifions E et E^{**}, par $\Theta : E \to E^{**}$, $e \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(e))$ (acrobatie mentale demandée !).

Théorème 5 $\quad {}^t({}^t u) = u$

Remarquons :

$$
\begin{array}{ccc}
E & \xrightarrow{u} & F \\
E^* & \xleftarrow{{}^t u} & F^* \\
\underbrace{E^{**}}_{E} & \xrightarrow{{}^{tt} u} & \underbrace{F^{**}}_{F}
\end{array}
$$

<u>Preuve</u> Il s'agit de montrer que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\Theta"'] & F \arrow[d, "\theta"] \\ E^{**} \arrow[r, "{}^{tt}u"] & F^{**} \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire ${}^{tt}u \circ \Theta = \Theta \circ u$.

Autrement dit :

$\forall e \in E, \quad {}^{tt}u \circ \Theta(e) = \Theta \circ u(e)$.

Le membre droit est la forme linéaire sur F^* qui à $\psi \in F^*$ associe $\psi(u(e))$.

Le membre gauche évalué en ψ donne :

$$\begin{aligned} {}^{tt}u(\Theta(e))(\psi) &= \theta(e) \circ {}^{t}u(\psi) \\ &= \Theta(e)({}^{t}u(\psi)) \\ &= \theta(e)(\psi \circ u) \\ &= \psi \circ u(e). \qquad \square \end{aligned}$$

NB si $\alpha \in E^{**}$, ${}^{tt}u(\alpha) = \alpha \circ {}^{t}u$