

Dualité : transposée d'une application linéaire.

Définition Soit E, F des espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle transposée de u , notée ${}^t u$, la fonction

$$\begin{aligned} F^* &\longrightarrow E^* \\ \varphi &\longmapsto \varphi \circ u \end{aligned}$$

NB On a donc ${}^t u(\varphi) = \varphi \circ u$.

Remarquer aussi que $\varphi \circ u$ va bien de E vers K , car u va de E vers F et φ de F vers K .

Il y a plusieurs vérifications à faire :

(i) $\varphi \circ u$ est bien une forme linéaire sur E , i.e. $\varphi \circ u \in E^*$.

(ii) ${}^t u$ est linéaire.

Vérifions (i) :

Cela découle de ce que φ et u sont linéaires et que la composée de deux applications linéaires est linéaire.

Vérifions (ii) : soit $\varphi, \psi \in F^*$ et $\alpha \in K$.

Montrons que ${}^t u(\varphi + \psi) = {}^t u(\varphi) + {}^t u(\psi)$
 et ${}^t u(\alpha \varphi) = \alpha {}^t u(\varphi)$.

Pour cela, on prend e dans E et on montre que les 2 membres de chacune des égalités, évalués en e , donnent le même résultat.

$$\begin{aligned}
{}^t u(\varphi + \psi)(e) &= (\varphi + \psi) \circ u(e) \\
&= (\varphi + \psi)(u(e)) \\
&= \varphi(u(e)) + \psi(u(e)) \\
&= \varphi \circ u(e) + \psi \circ u(e) \\
&= (\varphi \circ u + \psi \circ u)(e) \\
&= ({}^t u(\varphi) + {}^t u(\psi))(e)
\end{aligned}$$

Donc ${}^t u(\varphi + \psi) = {}^t u(\varphi) + {}^t u(\psi)$. De plus

$$\begin{aligned}
{}^t u(\alpha \varphi)(e) &= (\alpha \varphi) \circ u(e) = (\alpha \varphi)(u(e)) \\
&= \alpha \varphi(u(e)) \\
&= \alpha \varphi \circ u(e) = \alpha {}^t u(\varphi)(e) \\
&= (\alpha {}^t u(\varphi))(e)
\end{aligned}$$

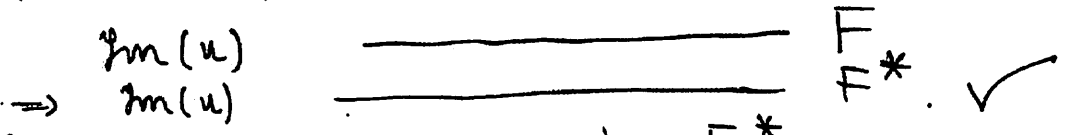
Donc ${}^t u(\alpha \varphi) = \alpha {}^t u(\varphi)$.

Théorème 1 Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

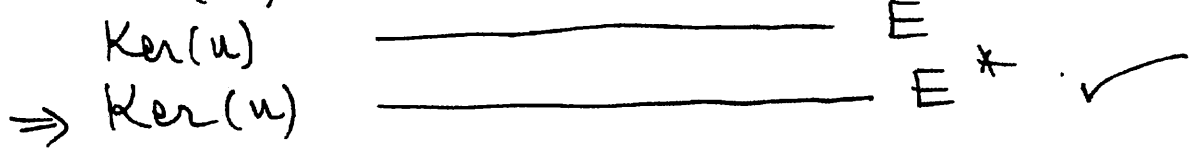
$$\text{Ker}({}^t u) = (\text{Im}(u))^{\circ}$$

et $\text{Im}({}^t u) = (\text{Ker}(u))^{\circ}$

Regardons d'abord si ces égalités ont du sens. On a: $\text{Ker}({}^t u)$ sous-espace de F^*



De plus: $\text{Im}({}^t u)$ sous-espace de E^*



Prouve On a $\varphi \in \text{Ker } {}^t(u)$

$$\Leftrightarrow \varphi \circ u = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Im}(u) \subseteq \text{Ker } \varphi$$

$$\Leftrightarrow \forall f \in \text{Im}(u), \varphi(f) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varphi \in \text{Im}(u)^\circ$$

Pour la deuxième égalité, il suffit de montrer que $\text{Im}({}^t u)^\circ = \text{Ker}(u)$, d'après le cor. 9.4.

On a: $e \in \text{Ker}(u) \Leftrightarrow u(e) = 0$

$$\Leftrightarrow u(e) \in (F^*)^\circ \quad (\text{car } (F^*)^\circ = \{0\} \text{ cor. 16.4})$$

$$\Leftrightarrow \forall \varphi \in F^*, \varphi(u(e)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \varphi \in F^*, \varphi \circ u(e) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{\hspace{10em}}, \quad {}^t u(\varphi)(e) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \psi \in \text{Im}({}^t u), \psi(e) = 0$$

$$\Leftrightarrow e \in \text{Im}({}^t u)^\circ$$

□

Corollaire 2 $\text{rg}(u) = \text{rg}({}^t u)$

preuve On a: $\dim \text{Ker}({}^t u) + \dim \text{Im}({}^t u) = \dim F^*$

et: $\dim \text{Im}(u) + \dim \text{Im}(u)^\circ = \dim F$

Comme $\dim F = \dim F^*$, on obtient

par soustraction, et le th. 1, que $\dim \text{Im } {}^t u - \dim \text{Im}(u) = 0$,

i.e $\text{rg}(u) = \text{rg}({}^t u)$. □

Corollaire 3 1) ${}^t u$ injective $\Leftrightarrow u$ surjective 4

2) ${}^t u$ surjective $\Leftrightarrow u$ injective

Preuve 1) ${}^t u$ injective $\Leftrightarrow \text{Ker}({}^t u) = 0$

$$\begin{array}{l} \text{th.1} \\ (=) \end{array} \quad \text{Im}(u)^\circ = 0 \quad \begin{array}{l} (=) \\ \text{cor. 16.4} \end{array} \quad \text{Im}(u) = F$$

2) ${}^t u$ surjective $\Leftrightarrow \text{Im}({}^t u) = F \stackrel{\text{th.1}}{=} \text{Ker}(u)^\circ = F$

$\stackrel{\text{cor. 9.4}}{=} \text{Ker}(u) = 0 \quad \square$

Théorème 4 Soient E, F des espaces vectoriels, avec bases respectives B et C .

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. La matrice de ${}^t u$ dans les bases duales C^* et B^* de F^*, E^* est la transposée de la matrice de u dans les bases B et C .

Preuve Soit M la matrice de u dans les bases $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ et $C = \{f_1, \dots, f_p\}$.

$$\text{Soit } M = (m_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$$\text{On a donc } u(e_j) = \sum_{1 \leq i \leq p} m_{ij} f_i$$

$$\text{Posons } {}^t u(f_k^*) = \sum_{1 \leq k \leq n} m'_{kl} e_l^* \quad (1)$$

Pour démontrer le théorème, il suffit de montrer que $m'_{kl} = m_{lk}$.

5

Evaluons (1) de chaque côté en e_j (chaque côté est une forme linéaire sur E !). On a

$$\begin{aligned} {}^t u(f_e^*)(e_j) &= f_e^*(u(e_j)) \\ &= f_e^*\left(\sum_{1 \leq i \leq p} m_{ij} f_i\right) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq p} m_{ij} \underbrace{f_e^*(f_i)}_{\delta_{li}} = m_{lj} \end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned} \left(\sum_{1 \leq k \leq n} m'_{kl} e_k^*\right)(e_j) &= \sum_{1 \leq k \leq n} m'_{kl} \underbrace{e_k^*(e_j)}_{\delta_{kj}} \\ &= m'_{jl} \end{aligned}$$

Donc $m_{lj} = m'_{jl}$, cqfd. \square

Rappelons que nous identifions E et E^{**} ,
 par $\Theta: E \rightarrow E^{**}$, $e \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(e))$
 (acrobatie mentale demandée!).

Théorème 5 ${}^t({}^t u) = u$

Remarquons:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ E^* & \xleftarrow{{}^t u} & F^* \\ \underbrace{E^{**}} & \xrightarrow{{}^t({}^t u)} & \underbrace{F^{**}} \\ E & & F \end{array}$$

Preuve Il s'agit de montrer
que le diagramme
suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ \Theta \downarrow & & \downarrow \Theta \\ E^{**} & \xrightarrow{{}^t t u} & F^{**} \end{array}$$

c'est-à-dire ${}^t t u \circ \Theta = \Theta \circ u$.

Autrement dit :

$$\forall e \in E, \quad {}^t t u \circ \Theta(e) = \Theta \circ u(e).$$

Le membre droit est la forme linéaire
sur F^* qui à $\psi \in F^*$ associe $\psi(u(e))$.
Le membre gauche évalué en ψ donne :

$$\begin{aligned} {}^t t u(\Theta(e))(\psi) &= \Theta(e) \circ {}^t u(\psi) \\ &= \Theta(e)({}^t u(\psi)) \\ &= \Theta(e)(\psi \circ u) \\ &= \psi \circ u(e). \end{aligned}$$

□

NB

$$\forall \alpha \in E^{**}, \quad {}^t t u(\alpha) = \alpha \circ {}^t u$$