Algèbre linéaire 3 Cours 11

Christophe Reutenauer

Définitions Application bilinéaire $E \times F \to G$.
Application n-linéaire $E_1 \times \cdots \times E_n \to F$.
Application multilinéaire.
Forme (fonctionnelle) bilinéaire, n-linéaire.

Proposition 3 On suppose E, F, G de dimensions finies, avec bases $(e_i)_{i \in I}$, $(f_j)_{j \in J}$, $(g_k)_{k \in K}$.

Soit $B_{ijk} : E \times F \to G$
$(e_i, f_j) \mapsto g_k$

On étend B_{ijk} par bilinéarité en une application bilinéaire $E \times F \to G$. Les B_{ijk} forment une base de l'espace vectoriel des formes bilinéaires $E \times F \to G$.

Proposition 1 L'ensemble des applications bilinéaires $E \times F \to G$ est un espace vectoriel.

Exemples 1) $K \times K \to K$
$(x, y) \mapsto xy$ est une forme bilinéaire.

2) $M_n(K) \times M_n(K) \to M_n(K)$
$(x, y) \mapsto xy$ est une application bilinéaire.

3) $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
$((x_i), (y_i)) \mapsto \sum x_i y_i$ (produit scalaire)
est une forme bilinéaire.

4) $E^n \to K$, $(v_1, \dots, v_n) \mapsto \det(v_1, \dots, v_n)$ est une forme n-linéaire.

Proposition 2. Soient E, F, G des espaces vectoriels. Soit X (resp. Y) une base de E (resp. F). Soit $(g_{x,y})_{x \in X,\, y \in Y}$ une famille de vecteurs de E. Il existe une et une seule application bilinéaire $E \times F \to G$ qui envoie chaque couple (x, y) sur $g_{x,y}$.

Corollaire 1 La dimension de l'espace des applications bilinéaires $E \times F \to G$ est $\dim(E) \dim(F) \dim(G)$.

Corollaire 2 La dimension de l'espace des bilinéaires $E \times F \to K$ est $\dim(E) \dim(F)$.

Corollaire 3 La dimension de l'espace des applications (resp. formes) n-linéaires $E_1 \times \dots \times E_n \to F$ (resp. $E_1 \times \dots \times E_n \to K$) est $\dim(E_1) \dots \dim(E_n) \dim(F)$ (resp. $\dim(E_1) \dots \dim(E_n)$).