Algèbre linéaire 3 Cours 12 Christophe Reutenauer

Définitions 1) Une application n-linéaire $B : E^n \to F$ est *symétrique* si $\forall \sigma \in S_n$, $\forall e_1, \dots, e_n \in E$,

$$B(e_1, \dots, e_n) = B(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

2) Elle est dite *anti-symétrique* si $\forall \sigma \in S_n$, $\forall e_1, \dots, e_n \in E$,

$$B(e_1, \dots, e_n) = \varepsilon(\sigma)\, B(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

3) Elle est dite *alternée* si $\forall e_1, \dots, e_n \in E$ tels qu'il existe $i \neq j$ avec $e_i = e_j$, on a $B(e_1, \dots, e_n) = 0$.

Rappels
- groupe symétrique S_n
- signature $\varepsilon(\sigma)$
- S_n est engendré par les transpositions adjacentes $(i, \ i+1)$.

Exemples 1. Application bilinéaire $B : E \times E \to F$
- symétrique : $B(e, f) = B(f, e)$
- antisymétrique : $B(e, f) = -B(f, e)$
- alternée : $B(e, e) = 0$.

2. Le produit scalaire est symétrique.
3. Le déterminant est anti-symétrique, et aussi alterné.

Proposition 1 On définit, pour toute application n-linéaire $B : E^n \longrightarrow F$, et toute permutation $\sigma \in S_n$, la fonction $(\sigma . B) : E^n \to F$ par

$$(\sigma . B)(e_1, \ldots, e_n) = B(e_{\sigma 1}, \ldots, e_{\sigma n}).$$

Alors $\sigma . B$ est une application n-linéaire $E^n \to F$. La fonction ainsi définie

$$S_n \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$$

(où $\mathcal{B}$ est l'ensemble des applications n-linéaires $E^n \to F$) est une action à gauche de S_n sur $\mathcal{B}$.

Preuve. Il faut montrer que

$$\sigma . (\tau . B) = (\sigma \tau) . B$$

Soient $e_1, \ldots, e_n \in E$, quelconques. On a

$$(\sigma . (\tau . B))(e_1, \ldots, e_n) = (\tau . B)(e_{\sigma 1}, \ldots, e_{\sigma n})$$

Pour calculer ceci sans douleur, posons $f_i = e_{\sigma i}$. C'est donc égal à

$$(\tau . B)(f_1, \ldots, f_n) = B(f_{\tau 1}, \ldots, f_{\tau n}).$$

Comme $f_{\tau i} = e_{\sigma \tau i}$, c'est égal à

$$B(e_{\sigma \tau 1}, \ldots, e_{\sigma \tau n})$$

qui est bien égal à $(\sigma \tau . B)(e_1, \ldots, e_n)$. $\square$

Proposition 2 Les conditions suivantes sont équivalentes, pour une application n-linéaire $B : E^n \to F$:

(i) B est symétrique (resp. anti-symétrique) ;

(ii) $\forall \sigma \in S_n$, $\sigma . B = B$ (resp. $\sigma . B = -B$) ;

(iii) $\forall i = 1, \dots, n-1$, $(i, i+1) . B = B$ (resp. $(i, i+1) . B = -B$)

Proposition 3 Toute application multilinéaire alternée est antisymétrique. La réciproque est vraie en caractéristique $\neq 2$.