Algèbre linéaire 3 Cours 14 Christophe Reutenauer

Produit tensoriel $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$: c'est le quotient

$$K^{(E_1 \times \cdots \times E_n)} / H$$

où H est engendré par les éléments

$$(e_1, \dots, e_{i-1}, e_i + f_i, e_{i+1}, \dots, e_n) - (e_1, \dots, e_{i-1}, e_i, e_{i+1}, \dots, e_n) - (e_1, \dots, e_{i-1}, f_i, e_{i+1}, \dots, e_n)$$

et les $(e_1, \dots, e_{i-1}, \alpha e_i, e_{i+1}, \dots, e_n) - \alpha(e_1, \dots, e_n)$.

Propriété universelle : $\varphi_0 : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ est bilinéaire (φ_0 envoie $(e_1, \dots, e_n)$ sur $e_1 \otimes \cdots \otimes e_n := p((e_1, \dots, e_n))$, où $p : K^{(E_1 \times \cdots \times E_n)} \longrightarrow K^{(E_1 \times \cdots \times E_n)}/H$ est l'application canonique).

Pour tout espace vectoriel G et toute application n-linéaire $B : E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow G$ il existe une unique application linéaire

$$h : E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \longrightarrow G$$

telle que $B = h \circ \varphi_0$.

Propriétés de $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$:

* $\mathcal{L}_n(E_1, \dots, E_n; G) \simeq \mathcal{L}(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n, G)$
* Si $\dim(E_i) < \infty$, $i = 1, \dots, n$, alors $\dim(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n) = \dim(E_1) \cdots \dim(E_n)$
* Si B_i est une base de E_i, alors les $e_1 \otimes \cdots \otimes e_n$, $e_i \in B_i$ ($\forall i = 1, \dots, n$), forment une base de $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$.
* Tout élément de $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n$ est combinaison linéaire de tenseurs de rang 1, c'est-à-dire

~~de~~ $e_1 \otimes \cdots \otimes e_n$, $e_i \in E_i$

* $E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \simeq (E_1 \otimes E_2) \otimes E_3$

etc ...

* $E_1 \otimes \cdots \otimes E_n \simeq E_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes E_{\sigma(n)}$

si $\sigma \in S_n$

* $\mathcal{L}(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n, F_1 \otimes \cdots \otimes F_n)$

$\simeq \quad \mathcal{L}(E_1, F_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}(E_n, F_n)$

Cet isomorphisme est déterminé par :

$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \in \mathcal{L}(E_1, F_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{L}(E_n, F_n)$

est envoyé sur $\Phi \in \mathcal{L}(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n, F_1 \otimes \cdots \otimes F_n)$

défini par $\Phi(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) = \varphi_1(e_1) \otimes \cdots \otimes \varphi_n(e_n)$

* $E_1^* \otimes \cdots \otimes E_n^* \simeq (E_1 \otimes \cdots \otimes E_n)^*$

$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \longmapsto \Phi$

avec $\Phi(e_1 \otimes \cdots \otimes e_n) = \varphi_1(e_1) \cdots \varphi_n(e_n) \in K$

en dimension $< \infty$

* Isomorphisme canonique

$K \otimes \cdots \otimes K \simeq K$

<u>Définition</u> Soit E un espace vectoriel. <u>L'algèbre tensorielle</u> $T(E)$ est par définition

$$T(E) = \bigoplus_{n \geq 0} E^{\otimes n}$$

<u>Remarque</u>

$$E^{\otimes 0} = K$$
$$E^{\otimes 1} = E$$
$$E^{\otimes 2} = E \otimes E \quad \text{etc} \ldots$$

<u>Proposition 1</u> <u>Si</u> E <u>est de dimension finie</u>, <u>avec base</u> X, <u>une base de</u> $T(E)$ <u>est l'ensemble des</u>

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

<u>Remarques</u> • $\dim\left(E^{\otimes n}\right) = \dim(E)^n$.

• $\dim(T(E)) = \infty$ si $E \neq \{0\}$.

<u>Remarque</u> $T(E)$ est l'algèbre des "polynômes non commutatifs" en les variables $x \in X$, à coefficients dans K.

<u>Définition</u> Un <u>tenseur de type</u> (r, s) est un élément de $E^{\otimes r} \otimes (E^*)^{\otimes s}$. On dit aussi r fois contravariant et s fois covariant.