Proposition 1 Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de E et $f_1, \dots, f_p$ une base de F. Alors l'espace

$$A_2(E, E ; F)$$

des application bilinéaires alternées $E \times E \to F$ ~~est~~ a pour base les

$$B_{i,j,k}$$

avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $1 \leqslant k \leqslant p$, où

$$B_{i,j,k}(e_i, e_j) = g_k$$

$$B_{i,j,k}(e_j, e_i) = -g_k$$

$$B_{i,j,k}(e_{i'}, e_{j'}) = 0$$

si $(i', j') \notin \{(i,j), (j,i)\}$.

Corollaire 1 $\dim(A_2(E, E ; K)) = \binom{n}{2}$

Définition Le carré extérieur d'un espace vectoriel E est le quotient $K^{(E \times E)}/L$ où L est le sous-espace de $K^{(E \times E)}$ engendré par les éléments

$$(e_1 + e_2, e_3) - (e_1, e_3) - (e_2, e_3),$$

$$(e_1, e_2 + e_3) - (e_1, e_2) - (e_1, e_3),$$

$$(\alpha e_1, e_2) - \alpha(e_1, e_2),$$

$$(e_1, \alpha e_2) - \alpha(e_1, e_2),$$

$$(e, e)$$

pour tous les $e_1, e_2, e_3, e \in E$ et $\alpha \in K$.

Notation $E \wedge E$

Soit $p : K^{(E \times E)} \twoheadrightarrow E \wedge E$ l'application canonique.

On note $\quad e \wedge f = p((e,f))$

Proposition 2 $E \wedge E$ est le quotient de $E \otimes E$ par le sous-espace engendré par les $e \otimes e$.

Théorème 1 L'application $\varphi_0 : E \times E \to E \wedge E$, $(e,f) \mapsto e \wedge f$ est bilinéaire alternée.

Pour toute application bilinéaire alternée $B : E \times E \to G$, il existe une unique application linéaire $h : E \wedge E \to G$ telle que $B = h \circ \varphi_0$.

$$\begin{tikzcd} E \times E \arrow[r, "B"] \arrow[dr, two heads, "\varphi_0"'] & G \\ & E \wedge E \arrow[u, dashed, "h"'] \end{tikzcd}$$

Proposition 3 Tout élément de $E \wedge E$ est une somme de $e \wedge f$. On a

$$(e_1 + e_2) \wedge f = e_1 \wedge f + e_2 \wedge f$$

$$e \wedge (f_1 + f_2) = e \wedge f_1 + e \wedge f_2$$

$$(\alpha e) \wedge f = \alpha (e \wedge f) = e \wedge (\alpha f)$$

$$e \wedge e = 0$$

$$e \wedge f = - f \wedge e$$

Corollaire 2 $A_2(E,E;F) \simeq \mathcal{L}(E\wedge E, F)$

Corollaire 3 Si E de dimension finie avec base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$, alors $E\wedge E$ est de dimension $\binom{n}{2}$, avec base les $e_i\wedge e_j$, $1\leq i<j\leq n$.

Remarque $n=1 \Rightarrow E\wedge E = \{0\}$

Proposition 4 Il y a une bijection naturelle de l'ensemble des plans de E vers l'ensemble des droites de $E\wedge E$: si P est le plan $P = \langle e, f\rangle$, alors son image est la droite $\langle e\wedge f\rangle$.

Proposition 5 Tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$ induit une application linéaire $u\wedge u \in \mathcal{L}(E\wedge E, F\wedge F)$ définie par
$$(u\wedge u)(e\wedge e') = u(e)\wedge u(e').$$

Preuve
$$\begin{tikzcd}
E\times E \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & F\times F \arrow[d] \\
E\wedge E \arrow[r, dashed, "u\wedge u"'] & F\wedge F
\end{tikzcd}$$
$(e,e') \mapsto (u(e), u(e'))$

$\square$

NB $u\wedge v$ ne marche pas, car $u(e)\wedge v(e) \neq 0$ en général.

<u>Déf</u> $E \wedge \dots \wedge E$ (n fois) $= \Lambda^n(E)$ est le quotient de $K^{(E \times \dots \times E)}$ par le sous-espace engendré par les

$$(e_1, \dots, e_{i-1}, e_i + f_i, e_{i+1}, \dots, e_n) - (e_1, \dots, e_n) - (e_1, \dots, e_{i-1}, f_i, e_{i+1}, \dots, e_n)$$

$$(e_1, \dots, e_{i-1}, \alpha e_i, e_{i+1}, \dots, e_n) - \alpha(e_1, \dots, e_n)$$

et par les éléments $(e_1, \dots, e_n)$ tels qu'il existe $i \neq j$ avec $e_i = e_j$.

* <u>Propriété universelle</u> On note $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$ l'image canonique de $(e_1, \dots, e_n)$ dans V.
Pour ~~toute~~ application n-linéaire alternée $A : E \times \dots \times E \to G$, il existe une unique application linéaire $h : \Lambda^n E \to G$ telle que $A = h \circ \varphi_0$.

$$\begin{tikzcd} E^n \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "\varphi_0"'] & & G \\ & \Lambda^n E \arrow[ur, dashed, "h"'] & \end{tikzcd}$$

* $A_n(E, \dots, E; G) \simeq \mathcal{L}(\Lambda^n E, G)$

* Si $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ base de E, alors les $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$, avec $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq d$ forment une base de $\Lambda^n E$.

* Sa dimension est $\binom{d}{n}$

($d = \dim E$)

* Si $n > d$, alors $\Lambda^n E = 0$.
* $\dim \Lambda^d E = 1$: une base est $e_1 \wedge \dots \wedge e_d$, si $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ base de E

* Il y a une bijection naturelle entre sous-espaces de dimension n de E et droites de $\Lambda^n E$.

* Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$, elle induit $u \wedge \dots \wedge u : \Lambda^n E \longrightarrow \Lambda^n F$.

<u>Déf</u>. L'<u>algèbre extérieure</u> de E est $\Lambda E = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n E$

<u>Proposition 4</u> <u>C'est une algèbre sur K.</u>
<u>Si E est de dimension finie d, ΛE est de dimension 2^d.</u>

<u>Exemple de produit calcul</u> $e_1, e_2, e_3, \dots$ base de E.

$$(e_1 \wedge e_3) \wedge (e_2 \wedge e_3) = 0$$

$$(e_1 \wedge e_4) \wedge (e_2 \wedge e_3) = e_1 \wedge e_4 \wedge e_2 \wedge e_3$$
$$= - e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \wedge e_3$$
$$= e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$$