

Proposition 1 Soit e_1, \dots, e_n une base de E et f_1, \dots, f_p une base de F . Alors l'espace

$$A_2(E, E; F)$$

des applications bilinéaires alternées $E \times E \rightarrow F$ est à pour base les

$$B_{i,j,k}$$

avec $1 \leq i < j \leq n$, $1 \leq k \leq p$, ou

$$B_{i,j,k}(e_i, e_j) = g_k$$

$$B_{i,j,k}(e_j, e_i) = -g_k$$

$$B_{i,j,k}(e_{i'}, e_{j'}) = 0$$

si $(i', j') \notin \{(i, j), (j, i)\}$.

Corollaire 1 $\dim(A_2(E, E; K)) = \binom{n}{2}$

Définition Le cône extérieur d'un espace vectoriel E est le quotient $K^{(E \times E)} / L$ où L est le sous-espace de $K^{(E \times E)}$ engendré par les éléments

$$(e_1 + e_2, e_3) - (e_1, e_3) - (e_2, e_3),$$

$$(e_1, e_2 + e_3) - (e_1, e_2) - (e_1, e_3),$$

$$(\alpha e_1, e_2) - \alpha(e_1, e_2),$$

$$(e_1, \alpha e_2) - \alpha(e_1, e_2),$$

$$(e, e)$$

pour tous les $e_1, e_2, e_3, e \in E$ et $\alpha \in K$.

Notation

$E \wedge E$

Soit $p: K^{(E \times E)} \longrightarrow E \wedge E$ l'application

canonique.
On note

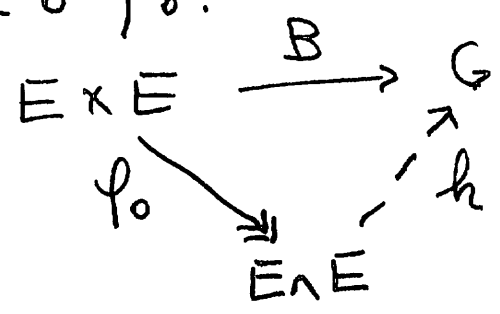
$$e \wedge f = p((e, f))$$

Proposition 2 $E \wedge E$ est le quotient de $E \otimes E$ par le sous-espace engendré par les $e \otimes e$.

Théorème 1 L'application $\gamma_0: E \times E \rightarrow E \wedge E$, $(e, f) \mapsto e \wedge f$ est bilinéaire alternée.

Pour toute application bilinéaire alternée

$B: E \times E \rightarrow G$, il existe une unique application linéaire $h: E \wedge E \rightarrow G$ telle que $B = h \circ \gamma_0$.



Proposition 3 Tout élément de $E \wedge E$ est une somme de $e \wedge f$. On a

$$\begin{aligned}
 (e_1 + e_2) \wedge f &= e_1 \wedge f + e_2 \wedge f \\
 e \wedge (f_1 + f_2) &= e \wedge f_1 + e \wedge f_2 \\
 (\alpha e) \wedge f &= \alpha(e \wedge f) = e \wedge (\alpha f) \\
 e \wedge e &= 0 \\
 e \wedge f &= -f \wedge e
 \end{aligned}$$

Corollaire 2 $A_2(E, E; F) \simeq \mathcal{L}(E \wedge E, F)$

Corollaire 3 Si E de dimension finie
avec base $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$, alors $E \wedge E$ est de
dimension $\binom{n}{2}$, avec base les $e_i \wedge e_j, 1 \leq i < j \leq n$.

Remarque $n=1 \Rightarrow E \wedge E = \{0\}$

Proposition 4 Il y a une bijection naturelle
de l'ensemble des plans de E vers
l'ensemble des droites de $E \wedge E$: si
 P est le plan $P = \langle e, f \rangle$, alors son
image est la droite $\langle e \wedge f \rangle$.

Proposition 5 Tout $u \in \mathcal{L}(E, F)$
induit une application linéaire $u \wedge u$
 $\in \mathcal{L}(E \wedge E, F \wedge F)$ définie par
 $(u \wedge u)(e \wedge e') = u(e) \wedge u(e').$

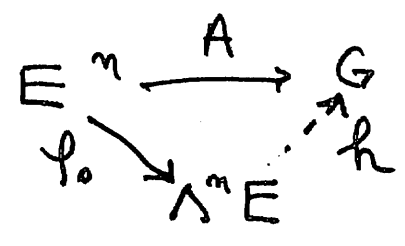
Preuve

$$\begin{array}{ccc}
 E \times E & \xrightarrow{\quad} & F \times F \\
 (e, e') & \mapsto & (u(e), u(e')) \\
 \downarrow & \searrow & \downarrow \\
 E \wedge E & \xrightarrow{u \wedge u} & F \wedge F \quad \square
 \end{array}$$

NB $u \wedge v$ ne marche pas, car $u(e) \wedge v(e) \neq 0$
 en général.

Déf $E \wedge \dots \wedge E$ (n fois) $= \wedge^n(E)$
 est le quotient de $K(E \times \dots \times E)$ par
 le sous-espace engendré par les
 $(e_1, \dots, e_{i-1}, e_i + f_i, e_{i+1}, \dots, e_n)$
 $- (e_1, \dots, e_n) - (e_1, \dots, e_{i-1}, f_i, e_{i+1}, \dots, e_n)$
 $(e_1, \dots, e_{i-1}, \alpha e_i, e_{i+1}, \dots, e_n) - \alpha (e_1, \dots, e_n)$
 et par les éléments (e_1, \dots, e_n) tels qu'il
 existe $i \neq j$ avec $e_i = e_j$.

* Propriété universelle On note $e_1 \wedge \dots \wedge e_n$
 l'image canonique de (e_1, \dots, e_n) dans V .
 Pour toute application n -linéaire alternée
 $A: E \times \dots \times E \rightarrow G$, il existe une unique
 application linéaire $h: \wedge^n E \rightarrow G$ telle que
 $A = h \circ \varphi_0$.



- * $A_n(E, \dots, E; G) \cong \mathcal{L}(\wedge^n E, G)$
- * si $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ base de E , alors
 les $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$, avec $1 \leq i_1 < \dots < i_n \leq d$
 forment une base de $\wedge^n E$.
- * Sa dimension est $\binom{d}{n}$

- * Si $n > d$, alors $\wedge^n E = 0$.
- * $\dim \wedge^d E = 1$: une base est $e_1 \wedge \dots \wedge e_d$, si $(e_i)_{1 \leq i \leq d}$ base de E .
- * Il y a une bijection naturelle entre sous-espaces de dimension n de E et droites de $\wedge^n E$.
- * Si $u \in \mathcal{L}_0(E, F)$, elle induit $u \wedge \dots \wedge u : \wedge^n E \rightarrow \wedge^n F$.

Déf. L'algèbre extérieure de E
est $\wedge E = \bigoplus_{n \geq 0} \wedge^n E$

Proposition 4. \wedge est une algèbre sur K .
Si E est de dimension finie d , $\wedge E$
est de dimension 2^d .

Exemple de calcul produit e_1, e_2, e_3, \dots base de E .

$$(e_1 \wedge e_3) \wedge (e_2 \wedge e_3) = 0$$

$$\begin{aligned} (e_1 \wedge e_4) \wedge (e_2 \wedge e_3) &= e_1 \wedge e_4 \wedge e_2 \wedge e_3 \\ &= -e_1 \wedge e_2 \wedge e_4 \wedge e_3 \\ &= e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4 \end{aligned}$$