Algèbre linéaire 3 Cours 16 C. Reutenauer

Complexifié d'un espace vectoriel

Notation : $E \otimes_K F$ pour préciser que le produit tensoriel est sur K.

Théorème | Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Le produit tensoriel $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} E$, où $\mathbb{C}$ a sa structure naturelle d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, devient un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, avec l'opération externe définie par

$$z \cdot (z' \otimes e) = zz' \otimes e.$$

Si $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une base de E (sur $\mathbb{R}$), alors les $1 \otimes e_i$ forment une base de $E_{\mathbb{C}}$ sur $\mathbb{C}$. La fonction $E \to E_{\mathbb{C}}$, $e \mapsto 1 \otimes e$ est $\mathbb{R}$-linéaire injective.

Définition On appelle $E_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} E$ le complexifié de l'espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2 Si $\varphi : E \to F$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire de E vers F (espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$), alors $id_{\mathbb{C}} \otimes \varphi$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire $E_{\mathbb{C}} \to F_{\mathbb{C}}$.