Algèbre linéaire 3 Cours 17 C. Reutenauer

Définition Forme sesquilinéaire : C'est une application $B : E \times E \to \mathbb{C}$, où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, telle que

$$B(e_1+e_2, e) = B(e_1, e) + B(e_2, e)$$
$$B(e, e_1+e_2) = B(e, e_1) + B(e, e_2)$$
$$B(\alpha e_1, e_2) = \alpha B(e_1, e_2)$$
$$B(e_1, \alpha e_2) = \overline{\alpha} B(e_1, e_2)$$

où $\alpha \in \mathbb{C}$, $e_1, e_2, e \in E$.

Elle est dite hermitienne si de plus $B(e_2, e_1) = \overline{B(e_1, e_2)}$. Elle est dite définie positive si $B(e,e) > 0$ $\forall e \in E \setminus 0$.

Remarque Analogies

bilinéaire	sesquilinéaire
symétrique	hermitienne.

Théorème 1 Si $(x,y) \mapsto \langle x,y \rangle$, $E \times E \to \mathbb{C}$ est une forme hermitienne définie positive, E a une base orthonormale.

On dit aussi produit scalaire complexe pour forme hermitienne définie positive.

Proposition 1 (inégalité de Cauchy-Schwarz)

$$|\langle x,y \rangle|^2 \leq \langle x,x \rangle \langle y,y \rangle.$$

<u>Proposition 2</u> Si $A : E \to E$ linéaire, où E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel avec une forme hermitienne définie positive $\langle\ ,\ \rangle$, il existe une unique application linéaire $A^* : E \to E$ telle que

$$\forall x, y, \quad \langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$$

<u>Définition</u> On appelle A^* l'<u>adjointe</u> de A

<u>Proposition 3</u>

$$(A+B)^* = A^* + B^*$$
$$A^{**} = A$$
$$(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$$
$$(AB)^* = B^* A^*$$

<u>Définition</u> A est dit <u>auto-adjointe</u> (ou <u>hermitienne</u>) si $A^* = A$

<u>Proposition 4</u> A <u>est auto-adjointe si et seulement si</u> $\langle Ax, x \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall x \in E$

<u>Lemme 1</u> <u>Si</u> $\langle Ax, x \rangle = 0 \quad \forall x \in E$, <u>alors</u> $A = 0$

<u>Proposition 5</u> <u>Si</u> A <u>est auto-adjointe</u>, <u>alors toutes les valeurs propres</u> de A <u>sont réelles</u>. <u>Si</u> $e, e' \in E \setminus 0$ <u>ont pour valeurs propres</u> λ, λ' <u>et</u> si $\lambda \neq \lambda'$, <u>alors</u> $e \perp e'$.

Théorème 2 (théorème spectral, cas hermitien)
Soit A auto-adjoint. Alors E a une base orthonormale formée de vecteurs propres de A. En particulier, A est diagonalisable

Définition $U \in End(E)$ est unitaire si
$$\forall x, y \in E, \quad \langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$$
Autrement dit, U préserve le produit scalaire

Lemme 2 U unitaire $\Leftrightarrow U^* = U^{-1}$

Théorème 3 (th. spectral, cas unitaire)
Il existe une base orthonormale formée de vecteurs propres de U. En particulier, U est diagonalisable.

- les valeurs propres de U sont de module 1.

Remarques • $z \in \mathbb{C}$ $\quad z = re^{i\theta}$
On va faire un analogue pour $A \in GL_n(E)$.

Théorème 4 (décomposition polaire d'un opérateur inversible)
Soit $A \in GL_n(E)$. On peut écrire $A = UP$, où U est unitaire et P est un défini positif (endomorphisme)

La conclusion pour P signifie par définition que $\forall x \in E \setminus 0$, $\langle Px, x \rangle > 0$ et

que P est auto-adjoint.

<u>Lemme 3</u> <u>Si</u> P <u>est défini positif</u>, <u>il existe un unique</u> $B \in \mathrm{End}(E)$ <u>tel que</u> $B^2 = P$.

(pour les preuves, on peut voir Algebra de Serge Lang)