Algèbre linéaire 3 — Cours 3 — Christophe Reutenauer

Sous-espaces caractéristiques

Définition 1 Un polynôme $P(x) \in K[x]$ est dit scindé si $P(x) = \prod_{i=1}^{n} (x-\alpha_i)$, avec des $\alpha_i \in K$. On dit aussi qu'il a toutes ses racines dans K.

NB : les α_i ne sont pas forcément distincts.
Un polynôme est scindé (sur K) ssi il s'écrit $\prod_{1 \leq i \leq k} (x-\alpha_i)^{n_i}$, $n_i \in \mathbb{P}$, α_i distincts.

Définition 2 Soit $f \in \operatorname{End}(V)$, V e.v. sur K. On suppose que le polynôme caractéristique de f est scindé, soit $\prod_{1 \leq i \leq k} (x-\alpha_i)^{m_i}$, $m_i \in \mathbb{P}$, $\alpha_i \in K$, α_i distincts.
Le sous-espace caractéristique de f associé à la valeur propre α_i est

$$\operatorname{Ker}\left((f - \alpha_i \, id)^{m_i} \right).$$

NB Le polynôme caractéristique de f est scindé ssi son polynôme minimal l'est. (cf. corollaire 3, cours 2).

Théorème 1 (hyp. de la déf. 2)

1. V est somme directe des sous-espaces caractéristiques.
2. Chacun d'eux est stable sous f.
3. La dimension du sous-espace caractéristique associé à α_i est m_i.

Lemme Soit $f \in \mathrm{End}(V)$.

(i) Si $A, B \in K[x]$ sont premiers entre eux, alors $\mathrm{Ker}((AB)(f)) = \mathrm{Ker}(A(f)) \oplus \mathrm{Ker}(B(f))$.

(ii) Si $A_1, \dots, A_k \in K[x]$ sont premiers entre eux deux à deux, alors

$$\mathrm{Ker}((A_1 \cdots A_k)(f)) = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} \mathrm{Ker}(A_i(f))$$

(iii) Dans les hypothèses de (ii), si de plus $(A_1 \cdots A_k)(f) = 0$, alors V est somme directe des $\mathrm{Ker}(A_i(f))$.

(iv) Pour $A \in K[x]$, $E = \mathrm{Ker}(A(f))$ est stable sous f. Soit $g = f|E \in \mathrm{End}(E)$.
Alors $A(g) = 0$.

(v) Soit f_i la restriction de f à son sous-espace caractéristique associé à α_i. Alors la seule valeur propre de f_i est α_i et son polynôme caractéristique est une puissance de $x - \alpha_i$.

Proposition 1 Soit $f \in \mathrm{End}(V)$ dont le polynôme minimal est $\prod_{i=1}^{k} (x-\alpha_i)^{n_i}$, α_i distincts. Alors son sous-espace caractéristique pour α_i est $\mathrm{Ker}(f - \alpha_i)^{n_i}$.