Diagonalisation

Définition 1 Un endomorphisme f est diagonalisable s'il existe une base de V formé de vecteurs propres.
Une matrice carrée est dite diagonalisable si c'est la matrice d'un endomorphisme diagonalisable.

Proposition 1 Soit λ une valeur propre de $f \in \mathrm{End}(V)$. L'ensemble des vecteurs propres de f pour λ, auquel on ajoute le vecteur nul, est un sous-espace de V. Il est égal à $\mathrm{Ker}(f - \lambda\, id.)$

Définition 2 On appelle le sous-espace de la proposition 1 le sous-espace propre pour λ.

Notation : V_λ

Remarque : $V_\lambda \neq \{0\}$, car λ est valeur propre.

Théorème 1 f est diagonalisable ssi

$$V = \bigoplus_{\substack{\lambda \text{ valeur} \\ \text{propre de } f}} V_\lambda$$

Lemme La somme $\sum_\lambda V_\lambda$ est toujours directe.

Proposition 2 Une matrice carrée est diagonalisable si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale.

Théorème 2 $f \in \mathrm{End}(V)$ est diagonalisable si et seulement son polynôme minimal est scindé et n'a que des racines simples.

Corollaire 1 Si le polynôme caractéristique de $f \in \mathrm{End}(V)$ est scindé et n'a que des racines simples, alors f est diagonalisable.

Théorème 3 Soit $f \in \mathrm{End}(V)$ dont le polynôme caractéristique est scindé. Il existe alors un endomorphisme diagonalisable d et un endomorphisme nilpotent n tels que $f = d + n$ et $dn = nd$.