Cours 5 Algèbre linéaire 3 Christophe Reutenauer

# Forme triangulaire et forme canonique rationnelle

## Triangularisation des matrices

**Théorème 1** Soit $f \in \mathrm{End}(V)$. Il existe une base de $V$ où la matrice de $f$ est triangulaire si et seulement si le polynôme caractéristique de $f$ est scindé.

**Corollaire 1** Une matrice carrée est semblable à une matrice triangulaire si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

**Corollaire 2** Si $K$ est algébriquement clos, alors toute matrice est semblable à une matrice triangulaire, et tout endomorphisme a une base où sa matrice est triangulaire.

## Espaces cycliques et forme canonique rationnelle

**Définition 1** $f \in \mathrm{End}(V)$. On dit que $V$ est cyclique sous l'action de $f$ s'il existe un vecteur $v$ tel que $V = \langle v, f(v), f^2(v), \dots \rangle$.

**Lemme 1** $V$ est cyclique ssi $\langle v, f(v), \dots, f^{n-1}(v) \rangle$ est une base de $V$, avec $n = \dim(V)$.

**Théorème 2** Soit $V$ un espace cyclique sous l'action de $f \in \mathrm{End}(V)$. Dans la base du lemme 1, la matrice de $f$ a la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & - & - & \cdots & 0 & \alpha_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \alpha_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & & 1 & \alpha_{n-1} \end{bmatrix}$$

où $x^n - \alpha_{n-1}x^{n-1} - \cdots - \alpha_0$ est le polynôme caractéristique de $f$.

Réciproquement, si la matrice de $f$ est de cette forme, alors $V$ est cyclique.

Une matrice de cette forme s'appelle une matrice compagnon (sous-entendu : compagne du polynôme $x^n - \alpha_{n-1}x^{n-1} - \cdots - \alpha_0$). On peut montrer qu'une telle matrice a ~~son~~ polynôme minimal égal à son polynôme caractéristique. On peut montrer aussi que si le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de $f$ sont égaux, alors $V$ est cyclique.