Algèbre linéaire 3 — Cours 7 — Christophe Reutenauer

Lemme 1 Supposons que la matrice M soit diagonale par blocs de Jordan J_k, $k=1,\dots,p$, et que la dimension de J_k est n_k, avec valeur propre α_k. Alors le polynôme caractéristique de M est $\prod_{k=1}^{p} (\lambda - \alpha_k)^{n_k}$ et son polynôme minimal est $\prod (\lambda - \alpha)^{m_\alpha}$ où

$m_\alpha = \max \{ n_k \mid k = \alpha \}$.

Exemple M somme diagonale de

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \ (\alpha), \ \begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}, \ \begin{pmatrix} \beta & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \qquad \alpha \neq \beta$$

Alors le polynôme caractéristique est $(x-\alpha)^3 \cdot (x-\beta)^{10}$

le polynôme minimal est $(x-\alpha)^2 (x-\beta)^4$.

Preuve La matrice M est triangulaire, donc son polynôme caractéristique est le produit des $x - \lambda$, $\lambda \in$ diagonale.

Le polynôme minimal de J_k est $(x - \alpha_k)^{n_k}$.

Donc le polynôme minimal de M est le ppmc de ces polynômes, $k = 1, \dots, p$.

$\square$

Preuve du th. 1 du cours 6

1. Ecrivons que le polynôme minimal de f est $\prod_{i=1}^{p} (\lambda - \alpha_i)^{n_i}$, où les α_i sont distincts et $n_i \geq 1$. Nous savons que V est somme directe des V'_{α_i} (= sous-espace caractéristique de f pour la valeur propre α_i). De plus, $V'_{\alpha_i} = \mathrm{Ker}((f-\alpha)^{n_i})$ soit f_i la restriction de f à V'_{α_i}. Alors $f_i \in \mathrm{End}(V'_{\alpha_i})$. Posons $f_i = \alpha_i \, id_{V'_{\alpha_i}} + h_i$. Alors h_i est un endomorphisme nilpotent de V'_{α_i}. Il possède donc une base de Jordan

$$\begin{array}{l}
v_{1 n_1} \to v_{1 n_1 - 1} \to \quad\quad \to v_{12} \to v_{11} \\
v_{2 n_2} \to \quad - - - - \quad \to v_{22} \to v_{22} \\
\quad\quad\quad \vdots \\
v_{k n_k} \to \quad - - - - \quad \to v_{k2} \to v_{k1}
\end{array}$$

On a $h_i(v_{rs}) = v_{r,s-1}$ (avec $v_{r,0} = 0$)

Donc $f_i(v_{rs}) = v_{r,s-1} + \alpha_i v_{rs}$.

Si on écrit la matrice de f_i dans la base des v_{rs}, on obtient une somme diagonale de k blocs de Jordan pour la même valeur propre α_i.

Comme V est somme directe des V'_{α_i}, on obtient une base de V en réunissant des bases des V'_{α_i}, $i = 1, \dots, p$. D'où l'existence de la forme de Jordan.

2. Unicité (cas d'une seule valeur propre). On se ramène au cas nilpotent. Si f a une seule valeur propre α, alors $(f-\alpha)^m = 0$ pour un certain m. Donc $h = f - \alpha\, id$ est nilpotent. Donc le type d'une base de Jordan de h ne dépend que de h, donc ne dépend que de f. De plus, une base où f est sous forme de Jordan est une base de Jordan de h. D'où l'unicité dans ce cas, par le th. 2.

3. Unicité (cas général) On se ramène aux sous-espaces caractéristiques et à la 2ème partie. $\square$