Cours 8 Algèbre linéaire 3 Christophe Reutenauer

Dualité : base duale, bidual

Si E, F sont deux espaces vectoriels, l'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E vers F est un espace vectoriel. Il est de dimension $\dim(E) . \dim(F)$.

En effet, si on choisit une base pour E et une base pour F, il y a un isomorphisme entre $\mathcal{L}(E, F)$ et $K^{\dim(F) \times \dim(E)}$: il consiste à associer à toute application linéaire $E \to F$ sa matrice dans ces bases.

Le plus simple de ces espaces $\mathcal{L}(E, F)$ est quand $E = K$ ou $F = K$. L'espace $\mathcal{L}(K, K)$ est isomorphe (canoniquement !) à K.

<u>Définition</u> On appelle <u>espace dual</u> de l'espace vectoriel E l'espace $\mathcal{L}(E, K)$. On le note E^*. On appelle <u>forme linéaire</u> un élément de E^*, c'est-à-dire une application linéaire $E \to K$.

Une autre raison d'étudier E^* est d'ordre géométrique : rappelons qu'une droite de

E est un sous-espace de dimension 1,
c'est-à-dire de la forme Ke, $e \in E \setminus 0$.
On appelle <u>hyperplan</u> de E un sous-espace de dimension $\dim(E) - 1$.
On peut formuler ça différemment : appelons <u>codimension</u> d'un sous-espace V de E le nombre $\dim(E) - \dim(V)$. C'est la dimension de E/V (quotient de E par V).

Alors, un hyperplan est un sous-espace de codimension 1.
Soit $\varphi : E \to K$ une forme linéaire non nulle. Le théorème du rang nous dit que $\dim(\mathrm{Ker}\,\varphi) = \dim(E) - 1$ (en effet, $\mathrm{Im}\,\varphi = K$), donc $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est un hyperplan de E.
Réciproquement, soit H un hyperplan de E. Il existe une base $e_1, \ldots, e_n$ de E telle que $e_1, \ldots, e_{n-1}$ soit une base de H (th. de la base incomplète). Soit $\varphi : E \to K$ la forme linéaire définie par $\varphi(e_i) = 0$ si $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ et $\varphi(e_n) = 1$. Alors $\mathrm{Ker}\,\varphi = H$: en effet, $H \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$ et ils ont même dimension. D'où le

<u>Théorème 1</u> <u>Les hyperplans sont les noyaux des formes linéaires non nulles.</u>

Théorème 2

Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de E. Définissons $e_1^*, \dots, e_n^* \in E^*$ par leur action sur cette base : $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$. Alors $e_1^*, \dots, e_n^*$ est une base de E^*, appellée la base duale de $e_1, \dots, e_n$. En particulier, $\dim(E) = \dim(E^*)$

Preuve

1. Montrons que $e_1^*, \dots, e_n^*$ sont linéairement indépendants. Supposons que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^* = 0 \qquad (\alpha_i \in K)$$

Appliquons le membre de gauche au vecteur e_j. On obtient

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*\right)(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i^*(e_j) = \alpha_j .$$

Donc $\alpha_j = 0$. Ceci est vrai pour $j = 1, \dots, n$.

2. Montrons que $e_1^*, \dots, e_n^*$ engendrent E^*. Soit $\varphi \in E^*$. Montrons que

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^* .$$

En effet, notons ψ le membre de droite. On a :

$$\begin{aligned} \psi(e_j) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*\right)(e_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*(e_j) \\ &= \varphi(e_j). \end{aligned}$$

Donc $\varphi = \psi$, puisqu'ils envoient chaque e_j sur le même élément. $\square$

Définition Le bidual de E est le dual du dual, noté par conséquent E^{**}.

Soit $i : E \to E^{**}$ la fonction définie par: $\forall e \in E$, $\forall \varphi \in E^*$

$$i(e)(\varphi) = \varphi(e).$$

Théorème 3 (E de dimension finie). La fonction $i : E \to E^{**}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve 1. Linéarité: soit $e, e' \in E$. Alors $\forall \varphi \in E^*$,

$$\begin{aligned} i(e+e')(\varphi) &= \varphi(e+e') \\ &= \varphi(e) + \varphi(e') \\ &= i(e)(\varphi) + i(e')(\varphi) \\ &= (i(e) + i(e'))(\varphi) \end{aligned}$$

Donc $i(e+e') = i(e) + i(e')$, car ils envoient tout $\varphi \in E^*$ sur le même élément.

Soit maintenant $e \in E$ et $\alpha \in K$. Alors, $\forall \varphi \in E^*$

$i(\alpha e)(\varphi) = \varphi(\alpha e) = \alpha \varphi(e) = \alpha\, i(e)(\varphi) = (\alpha\, i(e))(\varphi)$,

donc $i(\alpha e) = \alpha\, i(e)$, car ils envoient tout $\varphi \in E^*$ sur le même élément.

2. Injectivité: si $i(e) = 0$, alors $\forall \varphi \in E$, $0 = i(e)(\varphi) = \varphi(e)$. Si $e \neq 0$, il existe une base de E avec $e_1 = e$. Alors $e_1^*(e) = 1 \neq 0$. Donc $i(e)(e_1^*) \neq 0$. Donc i est injective.

3. Surjectivité: elle découle de l'injectivité et ~~de~~ $\dim(E) = \dim(E^{**})$ $\square$