Cours 9 Algèbre linéaire 3 Christophe Reutenauer

Dualité : orthogonalité

Définition 1) Soit E un espace vectoriel et U une partie de E. L'orthogonal de U dans E^* est la partie de E^* notée U^0 et définie par

$$U^0 = \{\varphi \in E^* \mid \forall u \in U,\ \varphi(u) = 0\}$$

2) Soit E un espace vectoriel et V une partie de E^*. L'orthogonal de V dans E est la partie de E notée V^0 et définie par

$$V^0 = \{e \in E \mid \forall \varphi \in V,\ \varphi(e) = 0\}.$$

Lemme 1 Soit E un espace vectoriel et $U \subseteq E$, $V \subseteq E^*$.

1. $U^0 = \{\varphi \in E^* \mid U \subseteq \operatorname{Ker} \varphi\}$
2. $V^0 = \bigcap_{\varphi \in V} \operatorname{Ker} \varphi$
3. U^0 est un sous-espace de E.
4. V^0 ——————————— E^*.

Preuve 1. L'assertion "$\forall u \in U, \varphi(u) = 0$" est équivalente à "$\forall u \in U, u \in \operatorname{Ker}\varphi$" donc aussi à "$U \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$".

2. L'assertion "$\forall \varphi \in V, \varphi(e) = 0$" est équivalent à "$\forall \varphi \in V, e \in \operatorname{Ker}\varphi$". Donc

$$V^0 = \{e \in E \mid \forall \varphi \in V, e \in \operatorname{Ker}\varphi\} = \bigcap_{\varphi \in V} \operatorname{Ker}\varphi.$$

3. Si $\varphi, \psi \in U^0$, alors $U \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$ et $U \subseteq \operatorname{Ker}\psi$. Donc $U \subseteq \operatorname{Ker}(\varphi+\psi)$, puisque $\forall u \in U$, $(\varphi+\psi)(u) = \varphi(u) + \psi(u)$ $= 0+0 = 0$.
De même, $\varphi \in U^0$ et $\alpha \in K$ implique $U \subseteq \operatorname{Ker}(\alpha\varphi)$.
4. L'intersection de sous-espaces est un sous-espace. □

<u>Théorème 2</u> <u>Soit E un espace vectoriel et F un sous-espace de E. Alors</u>
$$\dim(F) + \dim(F^0) = \dim(E).$$
<u>La même égalité est vraie si F est un sous-espace de E^*.</u>

<u>Preuve</u> Soit p la dimension de F et $e_1, \dots, e_n$ une base de E telle que $e_1, \dots, e_p$ soit une base de F. Soit $e_1^*, \dots, e_n^*$ la base duale. Pour qu'une forme linéaire φ s'annule sur F, il faut et suffit qu'elle s'annule sur $e_1, \dots, e_p$.
Comme $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)\, e_i^*$ (cf. preuve du th. 15.2), on a $\varphi = \sum_{i=p+1}^{n} \varphi(e_i)\, e_i^*$
$\Rightarrow$ F^0 est engendré par $e_{p+1}^*, \dots, e_n^*$ (car réciproquement, $e_{p+1}^*, \dots, e_n^* \in F^0$).

Pour la deuxième assertion, on raisonne de manière analogue en utilisant le lemme suivant. □

Lemme 3. Soit $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ une base de E^*. Il existe une base de E dont $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ est la base duale.

Preuve (gymnastique de l'esprit exigée)
E^{**} est le dual de E^*. Construisons la base duale de $\varphi_1^*, \dots, \varphi_n^*$ de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ dans E^{**}.
Elle satisfait : $\varphi_i^*(\varphi_j) = \delta_{ij}$.
Or, nous avions un isomorphisme canonique $\Theta : E \to E^{**}$ satisfaisant $\Theta(e)(\varphi) = \varphi(e)$.
Soient e_i tel que $\Theta(e_i) = \varphi_i^*$.
Alors $\varphi_j(e_i) = \Theta(e_i)(\varphi_j) = \varphi_i^*(\varphi_j) = \delta_{ij}$.
Donc $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ est la base duale de $e_1, \dots, e_n$.

□

On comprend mieux cette preuve en disant qu'on identifie E et E^{**}, c'est-à-dire un espace et son bidual (utilisant l'isomorphisme canonique $\Theta : E \to E^{**}$ cf. Th. 8.3)
L'identification consiste à associer à tout $e \in E$ la forme linéaire sur E^* :

$$\varphi \mapsto \varphi(e)$$

Corollaire 4 Si V est un sous-espace de E ou E^*, on a $V = V^{\circ\circ}$. En particulier $V \mapsto V^\circ$ est une bijection des sous-espaces de E (resp. de E^*) de dimension k sur les sous-espaces de dimension $\dim(E) - k$ de E^* (resp. de E).

Preuve. On a $\dim(V) = \dim(V^{\circ\circ})$. Il suffit de montrer que $V \subseteq V^{\circ\circ}$. Faisons-le pour V sous-espace de E. Soit $v \in V$. Alors

$$v \in V^{\circ\circ} \iff \forall \varphi \in V^\circ,\ \varphi(v) = 0 \qquad (1)$$

Or $\varphi \in V^\circ \Rightarrow \varphi(v) = 0$, puisque $v \in V$. Donc on a le membre droit de (1), donc aussi son membre gauche, i.e $v \in V^{\circ\circ}$. D'où $V \subseteq V^{\circ\circ}$. $\square$

Application 5 Montrons que si $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E^*$, alors :

$$\mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = E^* \iff \mathrm{Ker}\,\varphi_1 \cap \dots \cap \mathrm{Ker}\,\varphi_n = 0.$$

Preuve Notons $V = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.
Alors

$$\begin{aligned} V = E^* &\iff V^\circ = \{0\} \qquad (\text{car } (E^*)^\circ = \{0\}) \\ &\iff \{e \in E \mid \forall i, \varphi_i(e) = 0\} = \{0\} \qquad (\text{car } X^\circ = \mathrm{Vect}(X)^\circ) \\ &\iff \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\,\varphi_i = \{0\}. \end{aligned}$$