Algèbre linéaire 3 Devoir nr. 2 à rendre le

C. Reutenauer 26 octobre 2016

Soit K un corps commutatif et X un ensemble. On note K^X l'ensemble des fonctions de X vers K. Montrer que c'est un espace vectoriel sur K.

On note $K^{(X)}$ l'ensemble des fonctions de X vers K qui s'annulent sur presque tous les $x \in X$.

Montrer que $K^{(X)}$ est un sous-espace de K^X.

Pour $\varphi \in K^X$ et $f \in K^{(X)}$, on note

$$\langle \varphi, f \rangle = \sum_{x \in X} \varphi(x) f(x) .$$

Montrer que ceci est bien défini.

Montrer que $f \mapsto \langle \varphi, f \rangle$ est une forme linéaire sur $E = K^{(X)}$ (pour φ fixé), notée u_φ.

Montrer que l'application

$$\varphi \mapsto u_\varphi$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel

$$K^X \to E^* .$$

<u>Moralité</u> : K^X est le (ou s'identifie à) dual de $K^{(X)}$.