Algèbre linéaire 3 Examen du 21 octobre 2013 C. Reutenauer
3 heures

1. On considère l'endomorphisme f associé au graphe

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] a \arrow[r] & b \arrow[dr] & \\ & & c \\ d \arrow[r] & e \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire : $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = 0$, $f(d) = e$, $f(e) = c$,
où a, b, c, d, e est une base de V, $f \in \mathrm{End}(V)$.
Montrer que f est nilpotente.
Trouver une base de Jordan de f. Quel est son type ?

2. Soit V un espace vectoriel et V_i des sous-espaces, $i = 0, \ldots, n$, tels que $\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = V$.
Montrer que $\dim(V_i) = i$.
Montrer qu'il existe une base $v_1, \ldots, v_n$ de V telle que $v_1, \ldots, v_i$ soit une base de V_i, pour tout $i = 1, \ldots, n$.
Montrer que dans cette base, la matrice de $f \in \mathrm{End}(V)$, qui satisfait : $\forall i$, $f(V_i) \subseteq V_i$, est triangulaire supérieure.

3. On suppose connus le polynôme caractéristique et le polynôme minimal, tous deux scindés, de $f \in \mathrm{End}(V)$, avec $\dim(V) = 3$. Montrer qu'on peut en déduire la forme de Jordan de f (discuter selon le nombre de valeurs propres distinctes de f).

4. Soit f un endomorphisme de V tel que $f^2 = f$. Montrer que f est diagonalisable.

<u>Question bonus</u> : trouver deux endomorphismes qui ont le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal, tous deux scindés, mais qui n'ont pas même forme de Jordan.