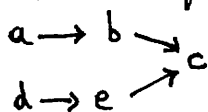


1. On considère l'endomorphisme  $f$  associé au graphe



c'est-à-dire :  $f(a) = b$ ,  $f(b) = c$ ,  $f(c) = 0$ ,  $f(d) = e$ ,  $f(e) = c$ ,  
où  $a, b, c, d, e$  est une base de  $V$ ,  $f \in \text{End}(V)$ .

Montrer que  $f$  est nilpotente.

Trouver une base de Jordan de  $f$ . Quel est son type ?

2. Soit  $V$  un espace vectoriel et  $V_i$  des sous-espaces,  
 $i = 0, \dots, n$ , tels que  $\{0\} = V_0 \subsetneq V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_n = V$ .

Montrer que  $\dim(V_i) = i$ .

Montrer qu'il existe une base  $v_1, \dots, v_n$  de  $V$   
telle que  $v_1, \dots, v_i$  soit une base de  $V_i$ , pour  
tout  $i = 1, \dots, n$ .

Montrer que dans cette base, la matrice  
de  $f \in \text{End}(V)$ , qui satisfait :  $\forall i, f(V_i) \subseteq V_i$ ,  
est triangulaire supérieure.

3. On suppose connus le polynôme caractéristique et le  
polynôme minimal, tous deux scindés, de  $f \in \text{End}(V)$ ,  
avec  $\dim(V) = 3$ . Montrer qu'on peut en déduire  
la forme de Jordan de  $f$  (discuter selon le  
nombre de valeurs propres distinctes de  $f$ ).

4. Soit  $f$  un endomorphisme de  $V$  tel que  
 $f^2 = f$ . Montrer que  $f$  est diagonalisable.

Question bonus : trouver deux endomorphismes qui ont le  
même polynôme caractéristique et le même polynôme  
minimal, tous deux scindés, mais qui n'ont  
pas même forme de Jordan.