Algèbre linéaire 3 Examen du 16 décembre 2013 C. Reutenauer
3 heures

1. On considère l'espace vectoriel $K[x]$ des polynômes. Soit $I : K[x] \to K[x]$ l'application linéaire qui envoie $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ sur $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^{n+1}$.
Soit φ_k la forme linéaire sur $K[x]$ qui associe à $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ le coefficient a_k de x^k.
Montrer que ${}^tI(\varphi_k) = \varphi_{k-1}$ si $k \geqslant 1$ et que ${}^tI(\varphi_0) = 0$.

2. Soit $f : V \to W$ une application linéaire. On rappelle que $\mathrm{Im}({}^tf) = \mathrm{Ker}(f)^\circ$ et que $H^{\circ\circ} = H$ pour tout sous-espace H de V.
Montrer que si $v \in V$, alors

$$(\forall \varphi \in W^*,\ v \in \mathrm{Ker}({}^tf(\varphi))) \iff v \in \mathrm{Ker}(f).$$

[Indication : écrire $v \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow v \in \mathrm{Ker}(f)^{\circ\circ}$ etc...

3. On rappelle qu'il y a un isomorphisme

$$\Theta : V^* \otimes V \longrightarrow \mathrm{End}(V)$$
$$\varphi \otimes v \longmapsto \Theta(\varphi \otimes v)$$

avec $\Theta(\varphi \otimes v)(u) = \varphi(u)v$.
On veut calculer la trace de l'endomorphisme $\Theta(\varphi \otimes v)$.
Soit $e_1, \dots, e_n$ une base de V. Calculer dans la base $e_1, \dots, e_n$ la matrice de $\Theta(e_j^* \otimes e_i)$. Montrer que sa trace est δ_{ij}.
Sachant que $\varphi = \sum_j \beta_j e_j^*$ et $v = \sum_i \alpha_i e_i$, montrer que la trace de $\Theta(\varphi \otimes v)$ est $\sum_i \beta_i \alpha_i$.
Montrer que la trace de $\Theta(\varphi \otimes v)$ est égale à $\varphi(v)$.

Bonus (facultatif)

Quel est le produit de $\Theta(\varphi \otimes v)$ par $\theta(\psi \otimes u)$?

4. Dans le produit extérieur

$$V \wedge V \wedge \cdots \wedge V \quad (k+1 \text{ fois})$$

montrer que si $x, y_1, \dots, y_k \in V$, alors

$$x \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_k = (-1)^k \, y_1 \wedge \cdots \wedge y_k \wedge x .$$

Barème

ex. 1.	8	(5+3)
2.	8	
3.	16	(4+4+4+4)
4.	8	