Algèbre linéaire 3 Exercices 1 C. Reutenauer

1. Dans $\mathbb{C}^n$, on considère l'application $\mathbb{C}$-linéaire u définie par $u(e_i) = e_{i+1}$ (indices pris modulo n ; e_i est la base canonique).
Montrer que son polynôme minimal = son polynôme caractéristique $= x^n - 1$ et que ses valeurs propres sont toutes les racines de l'unité.
NB considérer $v = \sum_{i=1}^{n} \omega^{-i} e_i$, où ω est une racine n-ème de l'unité et montrer que v est un vecteur propre pour la valeur propre ω.

2. Soit σ une permutation de $\{1, \dots, n\}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ qui envoie e_i sur $e_{\sigma(i)}$. Montrer que toute orbite de σ détermine un sous-espace stable sous u. Montrer que $\mathbb{C}(e_1 + \dots + e_n)$ est stable sous u. Montrer que le sous-espace engendré par les $e_i - e_j$ est stable sous u. Montrer que le polynôme caractéristique de u est le produit des $x^d - 1$, produit sur toutes les orbites de u, où d est la cardinalité de l'orbite.
NB Montrer que les orbites déterminent une décomposition de $\mathbb{C}^n$ en somme directe de sous-espaces stables.
Quel est le polynôme minimal de u ?