Algèbre linéaire 3 Exercices 10 C. Reutenauer

1. Montrer que $V \wedge V \simeq V \otimes V / E$, où E est le sous-espace de $V \otimes V$ engendré par les éléments $v \otimes v$, $v \in V$.

2. On note $\omega : V \otimes V \to V \otimes V$ l'application linéaire définie par : $v \otimes w \xmapsto{\omega} w \otimes v$.

Un élément t de $V \otimes V$ est dit symétrique (resp. alterné) si $\omega(t) = t$ (resp. $\omega(t) = -t$).

Montrer que l'ensemble des éléments symétriques (resp. alternés) est un sous-espace de $V \otimes V$.

Montrer que $V \otimes V$ est somme directe de ces deux sous-espaces. On suppose ici et dans la suite que K contient $\mathbb{Q}$, i.e sa caractéristique est nulle.

Montrer que le sous-espace des éléments symétriques (resp. alternés) est engendré par les éléments $v \otimes w + w \otimes v$ (resp. $v \otimes w - w \otimes v$).

Montrer que le sous-espace A des éléments alternés est isomorphe à $V \wedge V$.

Indication : utiliser la fonction

$$V \times V \longrightarrow A$$
$$(v, w) \longmapsto \tfrac{1}{2}(v \otimes w - w \otimes v)$$