Algèbre linéaire 3 Exercices 2 C. Reutenauer

1. Soit $f = \lambda\, id_V + n$, où $\lambda \in K$, $n \in End(V)$ est nilpotent. Quel est le polynôme caractéristique de f ?

2. Montrer que si $f = d + n$, d diagonalisable, n nilpotent, avec $dn = nd$, alors le polynôme caractéristique de f est scindé. Indications : se ramener aux sous-espace caractéristiques et utiliser 1.

3. Montrer qu'une matrice triangulaire avec des 0 sur la diagonale est nilpotente.

4. Calculer $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

5. Calculer $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$ et $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.

6. Soit $f \in End(V)$. Montrer que : f non injectif $\Leftrightarrow$ 0 est valeur propre de f.

7. Montrer que la matrice de f dans la base $v_1, \ldots, v_n$ est triangulaire supérieure ssi $\forall j$, $f(v_j) \in \langle v_1, \ldots, v_j \rangle$.

8. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

9. Soit $P(x) \in K[x]$ et $f \in End(V)$. Montrer que si $P(f) = 0$ et si λ est une valeur propre de f, alors $P(\lambda) = 0$. Que peut-on en déduire pour un endomorphisme nilpotent ?