Exercices 3   <u>Algèbre linéaire 3</u>   C. Reutenauer

1. Un <u>chemin</u> dans un graphe (S, A) est une suite d'arêtes $a_1 \dots a_k$, avec $a_i = (s_i, t_i)$ et $t_i = s_{i+1}$ pour $i = 1, \dots, k-1$. On dit que le chemin va de s_1 vers t_k.
La <u>matrice d'adjacence</u> du graphe est la matrice $M \in \mathbb{N}^{n \times n}$ telle que $m_{ij} = 1$ si $(i,j) \in A$, $= 0$ sinon (on suppose $S = \{1, \dots, n\}$).
Montrer que le coefficient i, j de M^k est égal au nombre de chemins de i vers j de longueur k.
En déduire que s'il n'y a pas de chemin fermé dans le graphe, M est nilpotente.

2. Soit M un bloc de Jordan nilpotent. Calculer les puissances de M (utiliser 1.).

3. On considère une base de Jordan comme dans le cours 6. Calculer les dimensions de $\mathrm{Im}(f)$, $\mathrm{Im}(f^2)$, etc...

4. Calculer aussi le degré de nilpotence de f, i.e le plus petit k tel que $f^k = 0$.

5. Soit le graphe

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] & b \arrow[r] & d \\ c \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

et $f \in \mathrm{End}(V)$, où V a pour base $\{a, b, c, d\}$, tel que $f(a) = b$, $f(c) = b$, $f(b) = d$, $f(d) = 0$. Trouver une base de Jordan pour f.