

1. Un chemin dans un graphe  $(S, A)$  est une suite d'arêtes  $a_1, \dots, a_k$ , avec  $a_i = (s_i, t_i)$  et  $t_i = s_{i+1}$  pour  $i = 1, \dots, k-1$ . On dit que le chemin va de  $s_1$  vers  $t_k$ .

La matrice d'adjacence du graphe est la matrice  $M \in \mathbb{N}^{n \times n}$  telle que  $m_{ij} = 1$  si  $(i, j) \in A$ ,  $= 0$  sinon (on suppose  $S = \{1, \dots, n\}$ ).

Montrer que le coefficient  $i, j$  de  $M^k$  est égal au nombre de chemins de  $i$  vers  $j$  de longueur  $k$ .

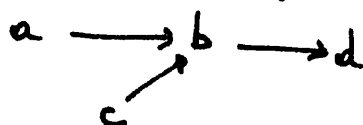
En déduire que s'il n'y a pas de chemin fermé dans le graphe,  $M$  est nilpotente.

2. Soit  $M$  un bloc de Jordan <sup>nilpotent</sup>. Calculer les puissances de  $M$  (utiliser 1.).

3. On considère une base de Jordan comme dans le cours 6. Calculer les dimensions de  $\mathcal{Y}_m(f)$ ,  $\mathcal{Y}_m(f^2)$ , etc...

4. Calculer aussi le degré de nilpotence de  $f$ , i.e. le plus petit  $k$  tel que  $f^k = 0$ .

5. Soit le graphe



et  $f \in \text{End}(V)$ , où  $\forall v$  pour base  $\{a, b, c, d\}$ , tel que  $f(a) = b$ ,  $f(c) = b$ ,  $f(b) = d$ ,  $f(d) = 0$ . Trouver une base de Jordan pour  $f$ .