Exercices 4 Algèbre linéaire 3 Christophe Reutenauer

1. Soit V un espace vectoriel sur K et E l'espace vectoriel des applications linéaires de K vers V. Montrer que la fonction $E \longrightarrow V$, $f \longmapsto f(1)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. Soit E, F des espaces vectoriels, de bases respectives $e_1, \dots, e_n$ et $f_1, \dots, f_p$. Soit φ_{ij} $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p)$ l'application linéaire $E \to F$ définie par :
$$\varphi_{ij}(e_i) = f_j, \quad \varphi_{ij}(e_{i'}) = 0 \text{ si } i' \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}.$$
Montrer que les φ_{ij} forment une base de $\mathcal{L}(E, F)$.

3. Soit H un hyperplan de E, avec $H = \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$, où $\varphi, \psi \in E^*$. Montrer qu'il existe $\alpha \in K$ tel que $\psi = \alpha\varphi$ (prendre une base $e_1, \dots, e_n$ de E avec $e_1, \dots, e_{n-1}$ base de H). Autrement dit, φ, ψ sont proportionnelles ; c'est-à-dire $K\varphi = K\psi$ (φ, ψ engendrent la même droite). En déduire que les hyperplans de E sont en bijection naturelle avec les droites de E^*.

4. Montrer que si $V = K$, alors V^* est canoniquement isomorphe à K, par : $\alpha \in K \longmapsto (\beta \mapsto \alpha\beta)$.