Exercices 5 Algèbre linéaire Christophe Reutenauer

1. Soient V, W des sous-espaces de E (resp. de E^*). Montrer que :

a. $V \subseteq W \Rightarrow W^\circ \subseteq V^\circ$

b. $(V+W)^\circ = V^\circ \cap W^\circ$

c. $(V \cap W)^\circ = V^\circ + W^\circ$.

2. Si X est une partie de E (resp. E^*), montrer que $X^\circ = \mathrm{Vect}(X)^\circ$.

3. Si X est une partie de E, montrer que $X^{\circ\circ} = \mathrm{Vect}(X)$.

4. Soit $H_i = \mathrm{Ker}(\varphi_i)$, où $\varphi_i \in E^* \setminus 0$. Montrer que si $H_1 = H_2$, alors $K\varphi_1 = K\varphi_2$.

5. Montrer que tout sous-espace de E (resp. E^*) est de la forme X° pour une partie finie X de E^* (resp. E).

6. Montrer que l'application linéaire

$$u \longmapsto {}^t u$$
$$\mathrm{End}(V) \longrightarrow \mathrm{End}(V^*)$$

est un isomorphisme (V de dimension finie).