Exercices 6 Algèbre linéaire 3

Christophe Reutenauer

1. Soient E, F, G trois espaces vectoriels. Montrer que si $u \in \mathcal{L}(E,F)$ et $v \in \mathcal{L}(F,G)$, alors ${}^t(v \circ u) = {}^tu \circ {}^tv$.
Montrer que ${}^t(id_E) = id_{E^*}$.

2. Soit V un sous-espace de E. On note $i : V \to E$ l'injection canonique. C'est-à-dire : $i(v) = v$, $\forall v \in V$.
Calculer le noyau de ${}^ti : E^* \to V^*$.
Montrer que ${}^ti$ est surjectif.
En déduire que $V^* \simeq E^*/V^0$

3. Soit $\pi : E \to V$ une application linéaire surjective. Montrer que ${}^t\pi : V^* \to E^*$ est injectif et calculer son image.

4. Soit $u : K \to M = K^{n \times n}$ la fonction qui à α associe $\mathrm{diag}(\alpha, \alpha, \dots, \alpha)$. Calculer ${}^tu(tr)(1)$. NB : tr est une forme linéaire sur M i.e $tr \in M^*$. Donc ${}^tu(tr)$ est une fonction $K \to K$.

5. Soit $\mathcal{P}_n$ l'espace des polynômes de degré $\leq n$ et $D : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n-1}$ la fonction dérivée. Soit $\varphi \in \mathcal{P}_{n-1}^*$ telle que $\varphi(P) = P(0)$. Quelle est la forme linéaire ${}^tD(\varphi)$ sur $\mathcal{P}_n$?