Algèbre linéaire 3 Exercices 7 Christophe Reutenauer

1. Soit $B : E \times E \to K$ une forme bilinéaire.
Soit $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E.
La <u>matrice de</u> B <u>dans cette base</u> est la matrice $M = (B(e_i, e_j))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$

Montrer que B est symétrique (resp. antisymétrique) si et seulement si sa matrice l'est.
Soit $e = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $x_i \in K$ et x le vecteur colonne qui représente e. Montrer que

$$B(e, f) = {}^t x M y$$

où $f = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, y le vecteur colonne correspondant.
Soit $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ une autre base et P la matrice de passage. Montrer que la matrice de B dans cette nouvelle base est

$${}^t P M P .$$

2. Soit B une application bilinéaire $E \times E \to F$.
Montrer que $B(u,v) = \frac{1}{2}\left(B(u,v) + B(v,u)\right) + \frac{1}{2}\left(B(u,v) - B(v,u)\right)$
pour tous vecteurs $u, v \in E$.
Montrer que le premier terme de cette somme est une application bilinéaire symétrique, et que le second est une application bilinéaire antisymétrique.