Algèbre linéaire 3 — Exercices 8 — Christophe Reutenauer

1. Si $\dim(E) = n$, $\dim(F) = p$, montrer que tout élément de $E \otimes F$ est une somme d'au plus $\max(n, p)$ élément de la forme $e \otimes f$.

2. On suppose que E, F sont de dimension finie. Montrer que $\mathcal{L}(E, F)$ est canoniquement isomorphe à $E^* \otimes F$.

Indication : montrer que

$$\begin{aligned} E^* \times F &\longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ (\varphi, f) &\longmapsto (e \mapsto \varphi(e) f) \end{aligned}$$

est bien définie (i.e c'est bien un élément de $\mathcal{L}(E, F)$) et bilinéaire.

Montrer qu'il existe donc une application linéaire

$$\begin{aligned} E^* \otimes F &\longrightarrow \mathcal{L}(E, F) \\ \varphi \otimes f &\longmapsto (e \mapsto \varphi(e) f). \end{aligned}$$

Montrer que c'est un isomorphisme en prenant des bases.

3. Retrouver l'isomorphisme de 2. en utilisant la proposition 13.5.

Indication : montrer d'abord que

$$\mathcal{L}(K, F) \simeq F$$